

Fiche de cours

Mouvement dans un champ de gravitation

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · lois · méthodes · à savoir par cœur

1 INTERACTION ET CHAMP DE GRAVITATION

Propriété — loi de la gravitation universelle. Deux corps à répartition sphérique de masse (ou ponctuels), de masses m_A et m_B , dont les centres sont distants de d , exercent l'un sur l'autre des forces **attractives**, opposées, portées par la droite (AB) , de même valeur

$$F = G \frac{m_A m_B}{d^2}, \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

Définition. Un astre de masse M crée autour de lui un **champ de gravitation** $\vec{G}$, dirigé vers son centre, de valeur $\mathcal{G} = G \frac{M}{r^2}$ à la distance r de ce centre. Un corps de masse m y subit la force $\vec{F} = m \vec{G}$.

Remarque. Au voisinage du sol, $\vec{G}$ s'identifie au champ de pesanteur $\vec{g}$: $g = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. Le champ de gravitation ne dépend pas de la masse du corps qui le subit.

2 SATELLITE EN ORBITE CIRCULAIRE

Propriété — le mouvement est uniforme. Pour un satellite de masse m en orbite circulaire de rayon r autour d'un astre de masse M , la seule force est la force de gravitation, centripète. La deuxième loi de Newton projetée dans le repère de Frenet donne

$$\underbrace{\frac{dv}{dt} = 0}_{\text{composante tangentielle}}, \quad \underbrace{\frac{v^2}{r} = G \frac{M}{r^2}}_{\text{composante normale}}.$$

La vitesse garde donc une valeur constante : le mouvement est **circulaire uniforme**.

Propriété — vitesse et période. On en déduit, quelle que soit la masse du satellite,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

Plus l'orbite est haute, plus le satellite est *lent* et plus sa période est *longue*.

3 LOIS DE KEPLER

Propriété. Pour les planètes du système solaire et, plus généralement, pour tout corps en orbite autour d'un astre :

- **première loi** (des orbites) : la trajectoire est une *ellipse* dont l'astre attracteur occupe l'un des foyers ;
- **deuxième loi** (des aires) : le segment reliant l'astre au corps balaie des aires égales pendant des durées égales — le corps va plus vite quand il est plus près de l'astre ;
- **troisième loi** (des périodes) : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$, où a est le demi-grand axe de l'ellipse. Le rapport T^2/a^3 est le *même* pour tous les satellites d'un même astre.

Méthode — établir la troisième loi dans le cas circulaire. élever $T = 2\pi \sqrt{r^3/(GM)}$ au carré : $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$, soit $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$, constante indépendante du satellite. L'orbite circulaire est le cas particulier $a = r$.

Méthode — tester la troisième loi. tracer T^2 en fonction de a^3 à partir de données astronomiques : les points doivent s'aligner sur une droite passant par l'origine, de coefficient directeur $4\pi^2/(GM)$.

4 APPLICATIONS

Définition. Un satellite **géostationnaire** reste à la verticale du même point de l'équateur : son orbite est *équatoriale*, parcourue dans le sens de rotation de la Terre, et sa période est égale à la période de rotation propre de la Terre, $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min} = 8,62 \times 10^4 \text{ s}$. La troisième loi impose alors un unique rayon, $r \approx 4,2 \times 10^4 \text{ km}$, soit une altitude d'environ $3,6 \times 10^4 \text{ km}$.

Méthode — déterminer la masse d'un astre. mesurer la période T et le rayon r de l'orbite d'un de ses satellites, puis écrire $M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2}$. La masse du satellite n'intervient pas.

■ **DONNÉES — Valeurs de référence**

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ • $M_{\text{T}} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_{\text{T}} = 6\,371 \text{ km}$ • $M_{\text{S}} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ • $M_{\text{L}} = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$, distance Terre-Lune $3,84 \times 10^5 \text{ km}$ • $1 \text{ ua} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer une force et un champ de gravitation ; relier g à M_{T} et R_{T} .
- Démontrer, dans le repère de Frenet, que le mouvement circulaire d'un satellite est uniforme.
- Établir et exploiter $v = \sqrt{GM/r}$ et $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GM)}$; ne pas oublier $r = R + h$.
- Énoncer les lois de Kepler, établir la troisième dans le cas circulaire et la tester sur des données astronomiques.
- Déterminer le rayon de l'orbite géostationnaire et la masse d'un astre à partir d'un de ses satellites.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — vitesse et période de la Station spatiale internationale

Altitude $h = 400 \text{ km}$, donc $r = R_{\text{T}} + h = 6,771 \times 10^6 \text{ m}$. Alors $v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6,771 \times 10^6}} = 7,67 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
et $T = \frac{2\pi r}{v} = 5,55 \times 10^3 \text{ s}$, soit environ 92 min.

★ EXEMPLE — rayon de l'orbite géostationnaire

$T = 8,62 \times 10^4 \text{ s}$. La troisième loi donne $r = \left(\frac{G M_{\text{T}} T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4,2 \times 10^7 \text{ m}$, soit une altitude $h = r - R_{\text{T}} = 3,6 \times 10^4 \text{ km}$ et une vitesse $v = 3,1 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

★ EXEMPLE — masse de la Terre à partir de la Lune

La Lune décrit une orbite quasi circulaire de rayon $r = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$ en $T = 27,3 \text{ j} = 2,36 \times 10^6 \text{ s}$. D'où $M_{\text{T}} = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$, en bon accord avec la valeur de référence $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$.

★ EXEMPLE — comparer deux orbites sans calculatrice

Deux satellites de la Terre ont des rayons d'orbite $r_2 = 4 r_1$. Comme $v \propto r^{-1/2}$, la vitesse du second est deux fois plus petite ; comme $T \propto r^{3/2}$, sa période est $4^{3/2} = 8$ fois plus longue. La troisième loi est bien vérifiée : T^2 est multipliée par 64 quand r^3 l'est aussi.

✖ PIÈGES

- Utiliser l'altitude h au lieu du rayon d'orbite $r = R + h$: toutes les formules font intervenir la distance au centre de l'astre.
- Faire intervenir la masse du satellite : elle se simplifie, v et T n'en dépendent pas.
- Croire qu'un mouvement circulaire uniforme a une accélération nulle : elle vaut v^2/r et est dirigée vers l'astre.
- Prendre 24 h pour la période géostationnaire : c'est le jour *sidéral*, 23 h 56 min.
- Oublier de convertir les durées en secondes et les distances en mètres avant l'application numérique.