

Exercices 1

Mouvement dans un champ de gravitation

Les bases : force et champ de gravitation, orbite circulaire, lois de Kepler

8 exercices · niveau ●○○ · durée conseillée : 1 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Calculer une force et un champ de gravitation ; établir, dans le repère de Frenet, que le mouvement circulaire d'un satellite est *uniforme*, puis retrouver $v = \sqrt{GM/r}$ et $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GM)}$.
- Énoncer et exploiter les trois lois de Kepler ; déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et la masse d'un astre à partir du mouvement d'un de ses satellites.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Interaction gravitationnelle** entre deux corps de masses m_A et m_B distants de d : forces attractives, opposées, portées par (AB) , de valeur $F = G \frac{m_A m_B}{d^2}$, avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$.
- **Champ de gravitation** créé à la distance r par un astre de masse M : $\vec{g}$ est dirigé vers le centre de l'astre et $\mathcal{G} = G \frac{M}{r^2}$; un corps de masse m y subit la force $\vec{F} = m \vec{g}$, et près du sol $\vec{g} = \vec{g}$.
- **Satellite en orbite circulaire de rayon r** : la deuxième loi de Newton projetée dans le repère de Frenet donne $\frac{dv}{dt} = 0$ (mouvement *uniforme*) et $\frac{v^2}{r} = G \frac{M}{r^2}$, d'où $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ et $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$.
- **Lois de Kepler** : (1) orbites elliptiques dont l'astre attracteur occupe un foyer ; (2) loi des aires ; (3) $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$, constante pour tous les satellites d'un même astre (a : demi-grand axe).
- **Données** : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6\,371 \text{ km}$ • $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ • $M_L = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$, distance Terre-Lune $d = 3,84 \times 10^5 \text{ km}$ • $1 \text{ ua} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$.

Exercice 1 La force d'interaction gravitationnelle

●○○

- 1.1 Énoncer la loi de l'interaction gravitationnelle entre deux corps à répartition sphérique de masse. Préciser la direction, le sens et le point d'application de chacune des deux forces.
- 1.2 Calculer la valeur de la force exercée par la Terre sur la Lune, puis celle de la force exercée par la Lune sur la Terre. Commenter.
- 1.3 Un satellite de masse $m = 1,2 \times 10^3 \text{ kg}$ orbite à l'altitude $h = 800 \text{ km}$. Calculer la valeur de la force gravitationnelle qu'il subit de la part de la Terre. Par quel facteur cette force serait-elle multipliée si l'altitude passait de 800 km à 1 600 km ? (*Attention : ce n'est pas l'altitude qui intervient dans la loi.*)

Exercice 2 Le champ de gravitation terrestre

●○○

- 2.1 Donner l'expression de la valeur $\mathcal{G}$ du champ de gravitation créé par la Terre à la distance r de son centre ; vérifier par le calcul que $\mathcal{G} = 9,81 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$ au sol.
- 2.2 Recopier et compléter le tableau ci-dessous (h : altitude).

Orbite	ISS	Hubble	GPS	Météosat
h (km)	400	540	20 200	35 800
r (km)				
$\mathcal{G}$ (N·kg ⁻¹)				

- 2.3** À bord de l'ISS, les astronautes flottent : peut-on en conclure qu'il n'y a « plus de gravité » à 400 km d'altitude ? Justifier à l'aide du tableau.
- 2.4** À quelle altitude le champ de gravitation terrestre vaut-il la moitié de sa valeur au sol ?

Exercice 3 Pourquoi le mouvement d'un satellite est-il uniforme ?



Un satellite S de masse m décrit une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre, de masse M_T , dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par la Terre. On travaille dans le repère de Frenet ($S ; \vec{u}_t, \vec{u}_n$), où $\vec{u}_t$ est tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et $\vec{u}_n$ dirigé vers le centre T de la Terre (figure 1).

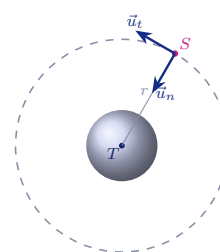


Figure 1 — Le repère de Frenet au point S

- 3.1** Exprimer, dans le repère de Frenet, le vecteur force gravitationnelle $\vec{F}$ subi par le satellite, puis rappeler l'expression du vecteur accélération pour un mouvement circulaire de rayon r .
- 3.2** Écrire la deuxième loi de Newton, puis identifier les composantes selon $\vec{u}_t$ et selon $\vec{u}_n$.
- 3.3** En déduire que $\frac{dv}{dt} = 0$: que peut-on affirmer sur la valeur de la vitesse et comment qualifie-t-on le mouvement ?
- 3.4** Montrer que $v = \sqrt{GM_T/r}$. La vitesse dépend-elle de la masse du satellite ? Commenter.

Exercice 4 La période de révolution de l'ISS



La Station spatiale internationale décrit autour de la Terre une orbite quasi circulaire d'altitude $h = 400$ km.

- 4.1** Calculer le rayon r de l'orbite, puis la valeur v de la vitesse de la station, en m·s⁻¹ puis en km·h⁻¹.
- 4.2** Le mouvement étant circulaire uniforme, la période T est la durée d'un tour : $T = 2\pi r/v$. Montrer que $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GM_T)}$.
- 4.3** Calculer T en secondes, puis en minutes. Combien de tours la station effectue-t-elle en 24 h ?
- 4.4** Un satellite d'observation orbite à l'altitude 700 km. Sans refaire tout le calcul, indiquer si sa vitesse et sa période sont plus grandes ou plus petites que celles de l'ISS. Justifier à partir des expressions littérales, puis vérifier par le calcul de T .

Exercice 5 Le satellite géostationnaire



Un satellite est dit *géostationnaire* lorsqu'il paraît immobile pour un observateur situé au sol.

- 5.1** Expliquer pourquoi un tel satellite doit nécessairement décrire une orbite circulaire contenue dans le plan de l'équateur, parcourue dans le sens de rotation de la Terre.
- 5.2** Quelle doit être sa période de révolution ? On prendra la durée du jour sidéral, $T = 86\,164$ s, et l'on expliquera brièvement pourquoi ce n'est pas exactement 24 h.
- 5.3** À partir de la troisième loi de Kepler, établir l'expression du rayon r de l'orbite en fonction de G , M_T et T , montrer que $r \approx 4,2 \times 10^4$ km, puis en déduire l'altitude et la vitesse du satellite.
- 5.4** Un satellite géostationnaire peut-il survoler Paris (latitude 49° nord) à la verticale ? Justifier.

Exercice 6 Les trois lois de Kepler



La figure 2 représente, avec une excentricité fortement exagérée, l'orbite elliptique d'une planète autour du Soleil. Le Soleil occupe le foyer F ; O est le centre de l'ellipse, $a = OP$ le demi-grand axe et $c = OF$ la distance centre-foyer. L'excentricité est définie par $e = c/a$.

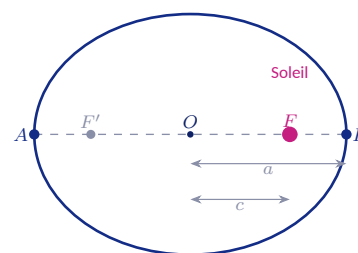


Figure 2 — Orbite elliptique (excentricité exagérée)

- 6.1 Énoncer les trois lois de Kepler.
- 6.2 Nommer les points P et A de la figure 2 et exprimer les distances FP et FA en fonction de a et e .
- 6.3 Pour Mercure, $a = 0,387$ ua et $e = 0,206$. Calculer, en ua, les distances minimale et maximale entre Mercure et le Soleil.
- 6.4 Indiquer si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant en une phrase.
 - a) Le Soleil est au centre de l'orbite de chaque planète.
 - b) Plus une planète est éloignée du Soleil, plus sa période de révolution est grande.

Exercice 7 La loi des aires



La comète de Halley décrit autour du Soleil une ellipse de demi-grand axe $a = 17,8$ ua et d'excentricité $e = 0,967$. Sur la figure 3 (schéma sans échelle), les deux aires colorées sont égales et ont été balayées par le segment Soleil-comète pendant la même durée Δt .

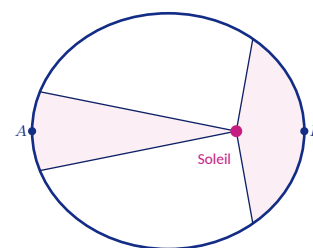


Figure 3 — Deux aires égales balayées pendant la même durée (schéma, échelle non respectée)

- 7.1 Commenter la figure 3 à l'aide de la deuxième loi de Kepler, puis en déduire, en le justifiant, en quel point de son orbite la comète se déplace le plus vite.
- 7.2 Calculer les distances comète-Soleil au périhélie ($r_P = a(1 - e)$) et à l'aphélie ($r_A = a(1 + e)$), en ua.
- 7.3 Sur un petit arc, l'aire balayée pendant Δt vaut environ $\mathcal{A} \approx \frac{1}{2} r v \Delta t$ (triangle de base $v \Delta t$ et de hauteur r). En écrivant l'égalité des deux aires, montrer que $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P}$ et calculer ce rapport.

Exercice 8 La troisième loi de Kepler, ou comment peser un astre



Le tableau donne le demi-grand axe a et la période de révolution T de quatre planètes du système solaire.

Planète	Vénus	Terre	Mars	Jupiter
a (ua)	0,723	1,000	1,524	5,203
T (année)	0,615	1,000	1,881	11,86

- 8.1 Calculer, pour chaque planète, le quotient T^2/a^3 en année² · ua⁻³. Que constate-t-on ? À quelle loi cela correspond-il ?
- 8.2 Cérès, seule planète naine de la ceinture d'astéroïdes, a un demi-grand axe $a = 2,77$ ua : prévoir sa période de révolution, en années.
- 8.3 La sonde *Juno* orbite autour de Jupiter, non du Soleil : le quotient T^2/a^3 calculé pour elle aurait-il la même valeur ? Justifier avec $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$.
- 8.4 En déduire l'expression de la masse M de l'astre central en fonction de r , T et G . Phobos tourne autour de Mars sur un cercle de rayon $r = 9\,376$ km en $T = 7$ h 39 min : calculer la masse de Mars.
- 8.5 De même, la Lune décrit une orbite circulaire de rayon $3,84 \times 10^5$ km en $T = 27,3$ j : en déduire la masse de la Terre et l'écart relatif avec la valeur des données. Pourquoi la masse de la Lune reste-t-elle inaccessible par cette méthode ?