

Exercices 2

Mouvement dans un champ de gravitation

Application : satellites artificiels, lunes de Jupiter, régression de Kepler, exoplanètes

7 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 1 h 45 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Exploiter $v = \sqrt{GM/r}$ et $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GM)}$ pour une orbite basse, une orbite moyenne ou une orbite géostationnaire, et remonter d'une période mesurée au rayon de l'orbite.
- Tester la troisième loi de Kepler sur un tableau de données (calcul de T^2/a^3 , droite $T^2 = f(a^3)$, programme Python) et en déduire la masse de l'astre central, y compris pour une étoile lointaine.

Toutes les orbites sont supposées circulaires, sauf mention contraire.

Exercice 1 Sentinel-2, l'œil de Copernicus

●●○

Les deux satellites européens *Sentinel-2* photographient la surface terrestre depuis une orbite quasi circulaire d'altitude $h = 786$ km, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ • $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6\,371 \text{ km}$

- 1.1 Faire un schéma de la situation avec le vecteur force gravitationnelle et le vecteur accélération du satellite. Justifier que le mouvement est uniforme.
- 1.2 Calculer la valeur de la vitesse du satellite, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ puis en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
- 1.3 Calculer la période de révolution T en minutes, puis le nombre de tours effectués en une journée.
- 1.4 Un capteur du satellite balaie au sol une bande de 290 km de large : la Terre tournant sous l'orbite, expliquer qualitativement pourquoi il faut plusieurs jours pour couvrir tout le globe.
- 1.5 Le satellite perd lentement de l'altitude à cause des frottements résiduels de la haute atmosphère. Sans calcul, indiquer si sa vitesse augmente ou diminue, et si sa période augmente ou diminue. Justifier à partir des expressions littérales.

Exercice 2 Starlink ou Météosat : quelle orbite choisir ?

●●○

Un satellite de la constellation *Starlink* orbite à l'altitude $h_1 = 550$ km ; le satellite météorologique *Météosat* est géostationnaire.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ • $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6\,371 \text{ km}$ • jour sidéral : 86 164 s

- 2.1 Calculer la vitesse et la période de révolution du satellite *Starlink*.
- 2.2 Rappeler la période de révolution d'un satellite géostationnaire et en déduire, à l'aide de la troisième loi de Kepler, le rayon de son orbite puis son altitude h_2 .
- 2.3 Un signal radio se propage à la vitesse $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer la durée minimale d'un aller-retour sol-satellite-sol dans les deux cas. Pourquoi les constellations de télécommunications récentes privilégient-elles les orbites basses ?
- 2.4 Quel est, en revanche, l'avantage décisif de l'orbite géostationnaire pour un satellite météorologique ou de télévision ?
- 2.5 Un satellite *Starlink* n'est visible d'un point du sol que quelques minutes par passage : pourquoi faut-il des milliers de satellites pour un service continu ?

Exercice 3 Le GPS : remonter de la période au rayon



Les satellites de la constellation GPS ont été placés sur des orbites telles que leur période de révolution vaut exactement la moitié du jour sidéral.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ • $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6\,371 \text{ km}$ • jour sidéral : 86 164 s

- 3.1 Calculer cette période T en heures et minutes.
- 3.2 En partant de la deuxième loi de Newton appliquée au satellite dans le référentiel géocentrique, établir la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ dans le cas d'une orbite circulaire.
- 3.3 En déduire l'expression du rayon r de l'orbite, puis montrer que l'altitude des satellites GPS vaut environ $2,02 \times 10^4 \text{ km}$.
- 3.4 Calculer la valeur de leur vitesse.
- 3.5 Combien de tours un satellite GPS fait-il en un jour sidéral ? En déduire qu'il repasse alors à la verticale du même point du sol.

Exercice 4 Les quatre lunes de Galilée



En janvier 1610, Galilée découvre quatre « astres » qui accompagnent Jupiter. Le tableau donne le rayon a de leur orbite, supposée circulaire, et leur période de révolution T .

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$

Satellite	Io	Europe	Ganymède	Callisto
$a \text{ (m)}$	$4,218 \times 10^8$	$6,711 \times 10^8$	$1,070 \times 10^9$	$1,883 \times 10^9$
$T \text{ (jour)}$	1,769	3,551	7,155	16,69

- 4.1 Convertir les quatre périodes en secondes, puis calculer pour chaque satellite le quotient T^2/a^3 en unités du système international. Conclure.
- 4.2 En déduire la masse de Jupiter. On donnera le résultat avec trois chiffres significatifs.
- 4.3 Amalthée est une petite lune découverte en 1892, dont l'orbite a pour rayon $a = 1,814 \times 10^8 \text{ m}$. Prévoir sa période de révolution, en heures.
- 4.4 Calculer la vitesse de Io et celle de Callisto sur leur orbite. Laquelle est la plus grande ? Était-ce prévisible ?
- 4.5 Galilée n'a mesuré que des *périodes* et des *écartements angulaires* : pourquoi ne pouvait-il pas en déduire la masse de Jupiter ?

Exercice 5 Python : tester la troisième loi de Kepler



Le programme ci-dessous exploite les données de l'exercice 4 pour déterminer la masse de Jupiter.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 G = 6.67e-11
3 noms = ["Io", "Europe", "Ganymede", "Callisto"]
4 a = [4.218e8, 6.711e8, 1.070e9, 1.883e9]      # rayon d'orbite (m)
5 T = [1.528e5, 3.068e5, 6.182e5, 1.442e6]      # periode (s)
6
7 x, y = [], []
8 for i in range(len(a)):
9     x.append(a[i]**3)
10    y.append(T[i]**2)
11    print(noms[i], T[i]**2 / a[i]**3)
12
13 pente = ...                                # ligne a completer
14 M = 4 * 3.14159**2 / (G * pente)
15 print("Masse de Jupiter :", M)
16 plt.plot(x, y, "+")
17 plt.show()
```

- 5.1 Que contiennent les listes x et y construites par la boucle ? Quelle est l'allure du nuage de points affiché à la ligne 16 ?
- 5.2 Quelles valeurs le programme affiche-t-il à la ligne 11 ? Que doit constater l'utilisateur ?
- 5.3 Compléter la ligne 13 pour que pente contienne le coefficient directeur de la droite $T^2 = f(a^3)$, calculé à partir du dernier satellite de la liste.
- 5.4 Justifier la formule utilisée à la ligne 14 pour calculer la masse de Jupiter.
- 5.5 On souhaite maintenant traiter les huit planètes du système solaire. Quelles lignes du programme faut-il modifier ? Quelle ligne afficherait alors la masse du Soleil ?

Exercice 6 Peser le Soleil par lecture graphique



La figure 1 représente le carré de la période de révolution T de quatre planètes en fonction du cube du rayon a de leur orbite, supposée circulaire.

- 6.1 Justifier, à l'aide de la troisième loi de Kepler, que les points doivent être alignés avec l'origine.
- 6.2 Déterminer graphiquement le coefficient directeur k de la droite, en précisant son unité. (On utilisera le point le plus éloigné de l'origine.)
- 6.3 En déduire la masse du Soleil et comparer à la valeur des données en calculant l'écart relatif.
- 6.4 La planète Vénus correspond au deuxième point à partir de l'origine. En déduire, par lecture graphique, le rayon de son orbite en mètres puis en ua, et sa période de révolution en jours.

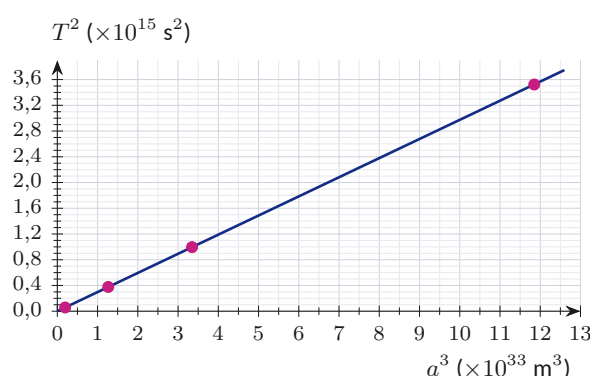


Figure 1 — T^2 en fonction de a^3 pour quatre planètes

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ • $1 \text{ ua} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$

Exercice 7 Une exoplanète détectée par transit



Lorsqu'une planète passe devant son étoile, elle en masque une petite fraction : le flux reçu sur Terre diminue légèrement. La figure 2 donne le flux relatif reçu de l'étoile HD 209458 pendant neuf jours ; l'orbite de la planète est supposée circulaire et vue par la tranche.

- 7.1 Déterminer graphiquement la période de révolution T de la planète, en jours puis en secondes.
- 7.2 Établir l'expression du rayon a de l'orbite en fonction de T , G et de la masse M de l'étoile, puis calculer a en mètres et en ua, sachant que $M = 2,25 \times 10^{30} \text{ kg}$.
- 7.3 Calculer la vitesse de la planète sur son orbite ; comparer à celle de la Terre ($29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) et commenter.
- 7.4 En réalité, les astronomes mesurent T mais ignorent M . Expliquer en une phrase ce que la seule courbe de la figure 2 permet — et ne permet pas — de déterminer.
- 7.5 La profondeur des creux vaut $1,4\%$ et est égale au rapport des aires des disques, $(R_p/R_{\text{étoile}})^2$: calculer le rayon de la planète en fonction de celui de l'étoile, puis en kilomètres ($R_{\text{étoile}} = 8,3 \times 10^5 \text{ km}$). Planète de type terrestre ou de type Jupiter ($R_{\text{Jupiter}} = 71\,492 \text{ km}$) ?

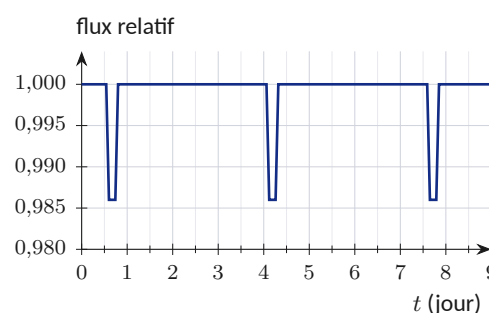


Figure 2 — Courbe de lumière de l'étoile HD 209458

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • $1 \text{ ua} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$