

Contrôle B

Mouvement dans un champ de gravitation

Troisième loi de Kepler, exploitation de données, masse d'un astre

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Toute réponse doit être justifiée et toute expression littérale établie avant l'application numérique ; les résultats sont donnés avec un nombre adapté de chiffres significatifs et leur unité. Les orbites sont supposées circulaires sauf mention contraire, et tous les référentiels utilisés sont supposés galiléens. Le dernier exercice est une résolution de problème : toute démarche, même partielle, sera valorisée.

Exercice 1 Questions de cours

4 pts ●●○

- 1.1 Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire de rayon r autour d'un astre de masse M . En appliquant la deuxième loi de Newton dans le repère de Frenet, démontrer que le mouvement est uniforme puis établir l'expression de v .
- 1.2 En déduire l'expression de la période T , puis la troisième loi de Kepler $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$.
- 1.3 Pour chacune des trois affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.
 - a) Si l'on multiplie par 4 le rayon de l'orbite d'un satellite, sa vitesse est divisée par 2 et sa période multipliée par 8.
 - b) Pour une planète sur une orbite elliptique, la valeur de la vitesse est constante.
 - c) Un astronaute en orbite est « en apesanteur » parce que la Terre n'exerce plus de force sur lui.

Exercice 2 Les lunes d'Uranus

6 pts ●●●

Le tableau donne, pour cinq satellites d'Uranus, le rayon a de leur orbite et leur période de révolution T .■ DONNÉES $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ • $M_{\text{T}} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_{\text{T}} = 6\,371 \text{ km}$ • 1 jour = 86 400 s

Satellite	Miranda	Ariel	Umbriel	Titania	Obéron
a (km)	$1,299 \times 10^5$	$1,909 \times 10^5$	$2,660 \times 10^5$	$4,363 \times 10^5$	$5,835 \times 10^5$
T (jour)	1,413	2,520	4,144	8,706	13,46

- 2.1 Calculer, pour Miranda et pour Obéron, le quotient T^2/a^3 en unités du système international. Que peut-on conclure quant à la troisième loi de Kepler ?
- 2.2 En déduire la masse d'Uranus, avec trois chiffres significatifs.
- 2.3 Calculer la valeur de la vitesse de Titania sur son orbite.
- 2.4 Un élève trace le graphique $T = f(a)$ et s'étonne de ne pas obtenir une droite. Expliquer son erreur et indiquer quelles grandeurs il doit porter en abscisse et en ordonnée pour obtenir une droite passant par l'origine.
- 2.5 Le rayon d'Uranus vaut $R = 2,56 \times 10^4 \text{ km}$. Calculer la valeur du champ de gravitation à la surface de la planète et la comparer à celle du champ de pesanteur terrestre.

- 2.6 Une sonde doit être placée en orbite circulaire autour d'Uranus avec une période de 24 h. Déterminer le rayon de son orbite, puis son altitude au-dessus de la surface.

Exercice 3 La Lune s'éloigne de la Terre

6 pts ●●●●

Depuis 1969, des réflecteurs déposés sur la Lune permettent de mesurer la distance Terre-Lune au centimètre près : sa valeur moyenne vaut aujourd'hui $r = 3,844 \times 10^8$ m et elle augmente de 3,8 cm par an. La période de révolution de la Lune est $T = 27,32$ j.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ • 1 jour = 86 400 s

- 3.1 Calculer la valeur de la vitesse de la Lune sur son orbite, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- 3.2 Établir l'expression de la masse de la Terre en fonction de r , T et G , puis la calculer. Comparer à la valeur des données en calculant l'écart relatif ; ce modèle vous paraît-il satisfaisant ?
- 3.3 Montrer que la période de révolution de la Lune s'écrit $T = k r^{3/2}$ et donner l'expression de la constante k .
- 3.4 Dans cent millions d'années, de combien la distance Terre-Lune aura-t-elle augmenté ? Calculer alors la nouvelle période de révolution de la Lune, en jours.
- 3.5 Sans calcul supplémentaire, indiquer si la vitesse de la Lune sur son orbite aura augmenté ou diminué. Justifier.
- 3.6 La Lune s'éloigne parce qu'elle « prend » de l'énergie à la rotation de la Terre, qui ralentit : la durée du jour augmente d'environ 1,8 ms par siècle. De combien la durée du jour aura-t-elle augmenté en cent millions d'années ?
- 3.7 Les éclipses totales de Soleil sont possibles parce que la Lune, vue de la Terre, a presque exactement le même diamètre apparent que le Soleil. Expliquer en une ou deux phrases pourquoi ce phénomène finira par disparaître.

Exercice 4 Résolution de problème : le monstre au centre de la Galaxie

4 pts ●●●●

Au centre de la Voie lactée, à 26 000 années-lumière de nous, se trouve une source radio très compacte nommée Sagittarius A*. Depuis 1995, des astronomes suivent le mouvement des quelques étoiles qui l'entourent. L'une d'elles, l'étoile S2, décrit une orbite elliptique de demi-grand axe $a = 1\,030$ ua avec une période de révolution $T = 16,05$ années (figure 1). Les observations montrent par ailleurs que toute la masse responsable de ce mouvement est confinée dans une sphère de rayon inférieur à 120 ua — à comparer aux 30 ua du rayon de l'orbite de Neptune.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ • 1 ua = $1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ • 1 année = $3,156 \times 10^7 \text{ s}$

Déterminer la masse de l'objet central et l'exprimer en masses solaires. Montrer ensuite qu'il ne peut pas s'agir d'un simple amas d'étoiles ordinaires : on estimera pour cela le rayon de la sphère qui contiendrait autant d'étoiles semblables au Soleil, sachant qu'au voisinage du Soleil on compte en moyenne une étoile par sphère de rayon $2,8 \times 10^5$ ua, et on comparera ce rayon à celui imposé par les observations. Conclure sur la nature de Sagittarius A*.

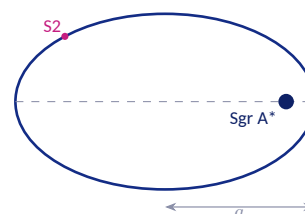


Figure 1 — L'orbite de l'étoile S2