

Approfondissement Écoulement d'un fluide

Démonstrations, vidange complète, débitmètre, portance : pour aller plus loin

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce que cette feuille ajoute au cours

- Démontrer *entièrement* le théorème d'Archimède et la formule de Torricelli, puis établir en littéral la relation d'un débitmètre à Venturi et en discuter la précision.
- Confronter le modèle du fluide parfait à la réalité : vidange complète d'un réservoir, portance d'une aile, flottaison, et problème ouvert.

Les fluides sont supposés parfaits et incompressibles, les écoulements permanents. Les passages « hors programme » ne sont pas exigibles au baccalauréat : les relations nécessaires y sont fournies.

Exercice 1 Démontrer le théorème d'Archimède



Un corps solide est entièrement immergé dans un liquide au repos de masse volumique ρ : la pression à la profondeur z vaut $P(z) = P_{\text{atm}} + \rho g z$ et la force pressante sur un élément de surface lui est perpendiculaire, dirigée vers l'intérieur du corps (figure 1).

A. Le cas d'un cylindre. Le corps est un cylindre d'axe vertical, de section S et de hauteur H , dont la face supérieure est à la profondeur h .

1.1 Exprimer les forces pressantes exercées sur les faces supérieure et inférieure, puis montrer que leur somme est verticale, dirigée vers le haut, de valeur $\rho S H g$.

1.2 Justifier que les forces pressantes exercées sur la surface latérale ont une résultante nulle.

1.3 Application : $S = 50,0 \text{ cm}^2$, $H = 20,0 \text{ cm}$, $h = 15,0 \text{ cm}$, liquide : eau. Calculer les deux forces pressantes puis leur somme.

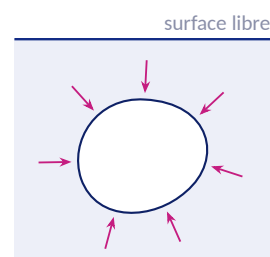


Figure 1 — Forces pressantes sur un corps immergé

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ • $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ • $P_{\text{atm}} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$

B. Le cas général. On remplace par la pensée le solide par le liquide lui-même, qui occupe exactement le même volume V et reste au repos.

1.4 Écrire la condition d'équilibre de ce volume de liquide. En déduire que la résultante des forces pressantes exercées sur sa surface est $\Pi = \rho V g$, verticale vers le haut.

1.5 Expliquer pourquoi ce résultat reste valable lorsque le solide est remis en place, quelles que soient sa masse et sa nature, et pourquoi la poussée ne dépend pas de la profondeur d'immersion.

1.6 Montrer qu'un corps homogène flottant à la surface vérifie $\frac{V_{\text{imm}}}{V} = \frac{\rho_{\text{corps}}}{\rho}$.

1.7 (*Hors programme — pour aller plus loin.*) Dans un ascenseur en chute libre, tout se passe comme si $g = 0$. Que devient la poussée d'Archimède ? Une bulle d'air remonte-t-elle encore dans une bouteille d'eau lâchée en chute libre ?

Exercice 2 La vidange complète d'un réservoir



Un réservoir cylindrique ouvert, de section $S = 0,25 \text{ m}^2$, contient de l'eau sur une hauteur initiale $h_0 = 1,80 \text{ m}$. On ouvre au fond un orifice de section $s = 5,0 \text{ cm}^2$.

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

- 2.1** En appliquant la relation de Bernoulli entre la surface libre et l'orifice *sans négliger* la vitesse de la surface libre, et en utilisant la conservation du débit, montrer que la vitesse d'éjection vaut

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}}.$$

Calculer l'erreur relative commise en utilisant la formule de Torricelli $v = \sqrt{2gh}$, et conclure.

- 2.2** Calculer la vitesse d'éjection initiale et le débit volumique initial.
- 2.3** (Hors programme — pour aller plus loin.) La hauteur d'eau $h(t)$ vérifie $-S \frac{dh}{dt} = s\sqrt{2gh}$. Vérifier que la fonction $h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{s}{2S}\sqrt{2g}t\right)^2$ est solution de cette équation et satisfait la condition initiale.
- 2.4** En déduire que la durée de la vidange vaut $t_{\text{vid}} = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ et la calculer, en minutes.
- 2.5** Montrer que la vitesse d'éjection décroît *linéairement* avec le temps, de v_0 à 0. En déduire, sans intégrer, une nouvelle expression du volume total écoulé et retrouver t_{vid} .

Exercice 3 Le débitmètre à Venturi : relation générale et précision



Un tube de Venturi horizontal de sections S_1 (conduite) et S_2 (col) est équipé d'un capteur qui mesure la différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$.

■ **DONNÉES** $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

- 3.1** À partir de la conservation du débit et de la relation de Bernoulli, établir que

$$D_v = S_2 \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right)}}.$$

- 3.2** Application : $S_1 = 20,0 \text{ cm}^2$, $S_2 = 8,00 \text{ cm}^2$, eau, $\Delta P = 3,00 \times 10^4 \text{ Pa}$. Calculer D_v , puis v_1 et v_2 .
- 3.3** Un technicien pressé utilise la formule simplifiée $D_v \approx S_2 \sqrt{2\Delta P/\rho}$. Calculer l'erreur relative ainsi commise. Est-elle par excès ou par défaut ?
- 3.4** L'incertitude-type sur la mesure de pression vaut $u(\Delta P) = 5,0 \times 10^2 \text{ Pa}$. On admet que $\frac{u(D_v)}{D_v} = \frac{1}{2} \frac{u(\Delta P)}{\Delta P}$. Calculer $u(D_v)$ et écrire le résultat de la mesure sous la forme $D_v \pm u(D_v)$.
- 3.5** Pourquoi a-t-on intérêt à choisir un col nettement plus étroit que la conduite ? Quel inconvénient apparaît si le col est trop étroit (on pensera à la pression au col) ?

Exercice 4 La portance d'une aile : ce que le modèle ne dit pas



Un avion de masse $m = 1,10 \times 10^3 \text{ kg}$ vole en palier à la vitesse $v = 60,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; ses ailes ont une surface totale $S = 14,0 \text{ m}^2$. On note v_e et v_i les vitesses de l'air à l'extrados et à l'intrados, supposées uniformes, en deux points de même altitude.

■ **DOCUMENT 1** — L'argument dit « des temps de parcours égaux »

On lit souvent que deux particules d'air séparées au bord d'attaque se rejoignent au bord de fuite au même instant : l'extrados étant plus long, l'air y irait plus vite. Ici, la ligne d'extrados mesure 1,10 m et celle d'intrados 1,00 m. En soufflerie, les particules d'extrados atteignent en réalité le bord de fuite *en avance*.

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ • $\rho_{\text{air}} = 1,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

- 4.1 Établir l'expression de la force de portance F en fonction de ρ_{air} , S , v_e et v_i .
- 4.2 Écrire la condition d'équilibre de l'avion en palier, calculer la portance nécessaire et la différence de pression $P_i - P_e$ correspondante; en prenant $v_i = v$, en déduire v_e et l'écart relatif entre v_e et v_i .
- 4.3 Calculer la valeur de v_e que prévoit l'argument du document 1, puis la portance correspondante. Quel pourcentage du poids de l'avion représente-t-elle? Conclure sur la validité de cet argument.
- 4.4 Cette conclusion remet-elle en cause la relation de Bernoulli elle-même? Justifier en distinguant le *modèle* et l'*hypothèse* sur les vitesses.
- 4.5 Le rapport v_e/v_i étant fixé par la forme de l'aile, montrer que la portance est proportionnelle à v^2 . Calculer la portance à $v = 45,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et conclure sur la nécessité, à basse vitesse, d'augmenter l'angle d'incidence ou de sortir les volets.
- 4.6 (*Hors programme — pour aller plus loin.*) Le modèle du fluide parfait, sans viscosité, prévoit une force de traînée nulle (paradoxe de d'Alembert). Citer deux phénomènes bien réels que ce modèle est donc incapable de décrire.

Exercice 5 Deux objets qui flottent : le glaçon et le densimètre

●●●

A. La fonte d'un glaçon change-t-elle le niveau de l'eau? Un verre cylindrique de section $\Sigma = 40,0 \text{ cm}^2$ contient de l'eau; on y fait flotter un glaçon de masse $m = 25,0 \text{ g}$.

■ **DONNÉES** $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

- 5.1 Calculer le volume immergé du glaçon, puis le volume d'eau liquide obtenu après sa fonte complète. Le niveau de l'eau dans le verre monte-t-il, descend-il ou reste-t-il inchangé?
- 5.2 Le même glaçon est cette fois posé sur une petite étagère fixée au-dessus de la surface, hors de l'eau. De combien le niveau monte-t-il après sa fonte?
- 5.3 En déduire, en deux phrases, pourquoi la fonte de la banquise et celle des glaciers continentaux n'ont pas le même effet sur le niveau des océans.

B. Le densimètre. Ce flotteur est formé d'un bulbe lesté de volume $V_0 = 22,0 \text{ cm}^3$ surmonté d'une tige graduée de section $s = 0,500 \text{ cm}^2$; sa masse totale vaut $m = 25,0 \text{ g}$ et L désigne la longueur de tige immergée dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ .

- 5.4 Écrire la condition d'équilibre du densimètre, puis montrer que $L = \frac{1}{s} \left(\frac{m}{\rho_\ell} - V_0 \right)$.
- 5.5 Calculer L dans l'eau pure, puis dans du lait ($\rho_\ell = 1,030 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$).
- 5.6 Les graduations sont-elles régulièrement espacées? Justifier. Si l'on sait lire L à 1 mm près, quelle précision obtient-on sur ρ_ℓ au voisinage de l'eau pure?

Exercice 6 Résolution de problème : où percer la bouteille?

●●●

Une bouteille cylindrique ouverte, posée sur une table, est remplie d'eau sur une hauteur $H = 40,0 \text{ cm}$. On perce un petit trou dans sa paroi verticale, à la hauteur y au-dessus du fond; l'eau jaillit horizontalement et retombe sur la table à la distance x du pied de la bouteille. Le niveau d'eau est maintenu constant par un apport continu.

Déterminer la hauteur y à laquelle il faut percer le trou pour que le jet atteigne la table le plus loin possible, ainsi que la portée maximale correspondante. Toute démarche, même partielle, sera valorisée. On pourra établir l'expression de x en fonction de y et de H , puis remarquer que x est maximale en même temps que x^2 .

- 6.1 Montrer que deux trous percés à des hauteurs y et $H - y$ donnent la même portée. Vérifier pour $y = 10,0 \text{ cm}$.

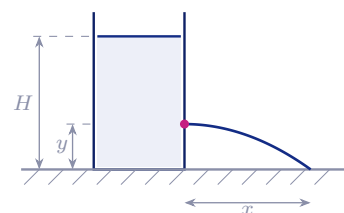


Figure 2 — Le jet issu du trou