

TERMINALE SPÉCIALITÉ · PHYSIQUE-CHIMIE · ONDES ET SIGNAUX · CHAPITRE 22



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement Dynamique du circuit RC

Résolution générale, temps de montée, bilan énergétique, stabilité de la méthode d'Euler, signal créneau, jauge capacitive, fuite d'un condensateur, problème ouvert

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Résoudre l'équation différentielle d'un circuit RC pour une condition initiale quelconque et en tirer des propriétés générales (tangente, temps de montée).
- Conduire un bilan énergétique, analyser la précision et la stabilité d'une méthode numérique, traiter un régime périodique.
- Modéliser un capteur capacitif réel et résoudre un problème ouvert en explicitant les hypothèses.

Exercice 1 Résolution générale et temps de montée

●●●

Un condensateur de capacité C , portant initialement la tension U_1 (avec $0 \leq U_1 < E$), est chargé à partir de $t = 0$ par une source idéale de tension E à travers une résistance R .

■ **DONNÉES** Solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : $y(t) = K e^{at} - \frac{b}{a}$, K constante réelle

- 1.1 Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C , puis la résoudre : montrer que $u_C(t) = E + (U_1 - E) e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$.
- 1.2 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe à l'origine des dates. Montrer qu'elle coupe l'asymptote $u = E$ à la date τ , quelle que soit la valeur de U_1 .
- 1.3 Montrer que la durée nécessaire pour réduire de moitié l'écart $E - u_C$ vaut $\tau \ln 2$, quelle que soit la date à laquelle on commence à la mesurer.
- 1.4 On prend désormais $U_1 = 0$. En électronique, on appelle *temps de montée* t_m la durée que met u_C pour passer de 10 % à 90 % de E . Montrer que $t_m = \tau \ln 9$.
- 1.5 À l'oscilloscope, on mesure $t_m = 5,3 \mu\text{s}$ pour $R = 1,00 \text{ k}\Omega$. En déduire C . Pourquoi cette méthode est-elle commode lorsque l'instant exact du début de la charge est mal repéré sur l'écran ?

Exercice 2 Bilan énergétique de la charge (hors programme — pour aller plus loin)

●●●

Un condensateur initialement déchargé est chargé sous la tension E à travers une résistance R ; on rappelle que

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

■ **DONNÉES** Énergie stockée par un condensateur : $\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u_C^2$

- 2.1 La puissance fournie par la source vaut $E i(t)$. En utilisant $i = dq/dt$, montrer que l'énergie fournie par la source pendant toute la charge vaut $W_g = C E^2$.
- 2.2 En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Commenter : dépend-elle de R ? Quel est le « rendement » de la charge ?
- 2.3 Retrouver ce résultat en calculant $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T R i(t)^2 dt$.
- 2.4 On charge maintenant le condensateur en deux étapes : d'abord sous $E/2$ jusqu'au régime permanent, puis sous E . Montrer que l'énergie totale dissipée n'est plus que $\frac{1}{4} C E^2$.

- 2.5** Généraliser à une charge en N paliers égaux, puis interpréter le résultat quand N devient très grand. Quel est l'inconvénient de cette méthode dite « adiabatique » ?

Exercice 3 Précision et stabilité de la méthode d'Euler



On simule la décharge $\tau \frac{du_C}{dt} = -u_C$, avec $u_C(0) = E$, par la méthode d'Euler de pas h :

$$u_{n+1} = u_n + h \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=t_n} \quad \text{avec } t_n = n h \text{ et } u_0 = E.$$

- 3.1** Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $1 - \frac{h}{\tau}$ et exprimer u_n en fonction de n .
- 3.2** On choisit $h = \frac{\tau}{10}$. Calculer la valeur approchée obtenue à la date τ et l'écart relatif avec la valeur exacte.
- 3.3** On choisit $h = \frac{\tau}{N}$. Montrer que la valeur approchée à la date τ vaut $E \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$, puis, à l'aide du logarithme, que cette valeur tend vers $E e^{-1}$ quand N tend vers $+\infty$.
- 3.4** Décrire l'allure de la suite obtenue pour $h = 1,5 \tau$, puis pour $h = 2,5 \tau$. À quelle condition sur h la simulation reproduit-elle une décroissance sans oscillation ? Une décroissance vers 0, même avec oscillations ?
- 3.5** Le programme ci-dessous cherche le plus petit nombre N de pas ($h = 3\tau/N$) pour lequel l'écart relatif à la date 3τ est inférieur à 25 %. Compléter la ligne 4, puis prévoir, à l'aide du mode « tableau » de la calculatrice, les valeurs affichées.

```
1 from math import exp
2 N = 1                                # nombre de pas pour atteindre 3 tau
3 while True:
4     u = ...                          # u_N / E (ligne à compléter)
5     if abs(u - exp(-3)) / exp(-3) < 0.25:
6         break
7     N = N + 1
8 print("N =", N, "; h =", round(3 / N, 3), "tau")
```

Exercice 4 Réponse d'un circuit RC à un signal créneau



Un générateur délivre une tension créneau $e(t)$ qui vaut alternativement $E = 5,0 \text{ V}$ pendant une demi-période, puis 0 pendant l'autre demi-période. Il alimente un circuit RC série de temps caractéristique $\tau = 1,0 \text{ ms}$ et l'on observe u_C . La demi-période vaut ici $\frac{T}{2} = \tau$; la figure 1 montre le régime périodique établi : u_C oscille entre $U_{\min}$ et $U_{\max}$.

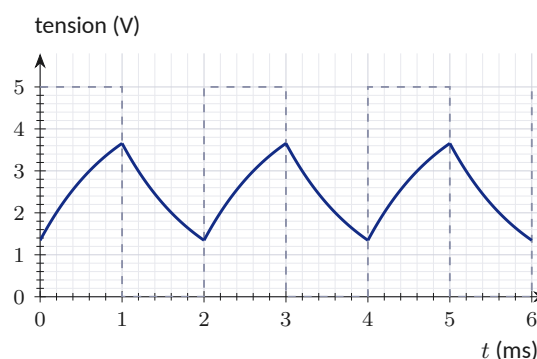


Figure 1 — $e(t)$ en pointillés, $u_C(t)$ en trait plein

- 4.1** Si la demi-période était très grande devant τ (par exemple $T/2 = 10 \tau$), quelle serait l'allure de u_C ? Entre quelles valeurs varierait-elle ?
- 4.2** On revient au cas $T/2 = \tau$. En utilisant la solution générale de l'exercice 1, exprimer $U_{\max}$ en fonction de $U_{\min}$ (phase de charge), puis $U_{\min}$ en fonction de $U_{\max}$ (phase de décharge).
- 4.3** En déduire que $U_{\max} = \frac{E}{1 + e^{-1}}$ et $U_{\min} = \frac{E e^{-1}}{1 + e^{-1}}$. Calculer ces valeurs et les comparer à la figure 1. Que vaut $U_{\max} + U_{\min}$? Interpréter.

- 4.4 Que devient u_C si la demi-période devient très petite devant τ ? Justifier qu'un circuit RC permet alors d'obtenir la valeur moyenne d'un signal.

Exercice 5 La jauge capacitive d'un réservoir



La jauge d'un réservoir de carburant est formée de deux plaques métalliques verticales, de hauteur $H = 40,0$ cm et de largeur $L = 5,0$ cm, parallèles et séparées de $e = 5,0$ mm. Le carburant ($\varepsilon_r = 2,0$) occupe l'espace entre les plaques sur une hauteur h ; au-dessus, il y a de l'air ($\varepsilon_r \approx 1$). On admet que la capacité de la jauge est la somme des capacités de la partie immergée et de la partie émergée, chacune étant calculée comme celle d'un condensateur plan.

■ **DONNÉES** Condensateur plan : $C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{e}$ • $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

- 5.1 Montrer que $C(h) = \frac{\varepsilon_0 L}{e} [H + (\varepsilon_r - 1) h]$. Calculer la capacité réservoir vide, puis réservoir plein.
- 5.2 La jauge est chargée à travers une résistance $R = 10,0 \text{ M}\Omega$ et l'électronique mesure le temps caractéristique : $\tau = 531 \text{ } \mu\text{s}$. Déterminer la hauteur de carburant.
- 5.3 Justifier que la relation entre τ et h est affine. Quel intérêt présente cette propriété pour l'affichage de la jauge ?
- 5.4 De l'eau ($\varepsilon_r \approx 80$), plus dense que le carburant, s'est accumulée au fond du réservoir sur $1,0$ cm ; le carburant occupe les 19 cm situés au-dessus (hauteur totale de liquide : 20 cm, comme à la question 5.2). Calculer la nouvelle capacité et la hauteur que la jauge afficherait. Conclure.

Exercice 6 La fuite d'un condensateur



Un condensateur réel se décharge lentement, même isolé : on modélise ce défaut par une *résistance de fuite* R_f branchée entre ses bornes. Un condensateur de capacité $C = 100 \text{ } \mu\text{F}$ est chargé sous $10,0 \text{ V}$, puis isolé à la date $t = 0$. On dispose d'un voltmètre de résistance d'entrée $R_V = 10,0 \text{ M}\Omega$.

- **Protocole 1** : le voltmètre reste branché ; la tension a diminué de moitié au bout de $9 \text{ min } 15 \text{ s}$.
 - **Protocole 2** : le voltmètre n'est branché qu'un bref instant pour chaque mesure ; il indique $10,0 \text{ V}$ à $t = 0$ et $6,38 \text{ V}$ à $t = 30 \text{ min}$.
- 6.1 Protocole 2 : justifier que la tension décroît selon $u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau_f}$ avec $\tau_f = R_f C$, puis déterminer τ_f et R_f .
- 6.2 Protocole 1 : le condensateur se décharge à la fois dans R_f et dans le voltmètre ; on admet que l'ensemble équivaut à une résistance $R_{\text{eq}} = \frac{R_f R_V}{R_f + R_V}$ (hors programme). Calculer le temps caractéristique correspondant, puis la durée au bout de laquelle la tension est divisée par deux ; comparer à la mesure.
- 6.3 Quel protocole mesure réellement la fuite ? À quelle condition sur R_V le protocole 1 serait-il acceptable ?

Exercice 7 Problème ouvert : l'horloge sauvegardée



Un réveil connecté conserve l'heure pendant les coupures de courant grâce à un supercondensateur de capacité $0,22 \text{ F}$, maintenu chargé sous $3,3 \text{ V}$ tant que le secteur est présent. Pendant une coupure, seul le circuit d'horloge reste alimenté par le supercondensateur. D'après sa notice, ce circuit consomme $1,1 \text{ } \mu\text{A}$ sous $3,3 \text{ V}$, son intensité étant proportionnelle à la tension appliquée, et il cesse de fonctionner en dessous de $1,8 \text{ V}$. Le fabricant du réveil affirme : « l'heure est conservée pendant au moins 4 jours de coupure ».

Cette affirmation est-elle justifiée ? Expliciter le modèle choisi et les hypothèses, puis discuter un phénomène qui pourrait réduire la durée réelle.