

Approfondissement Décrire un mouvement

Démonstrations, estimation des dérivées, trajectoires inhabituelles : pour aller plus loin

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce que cette feuille ajoute au cours

- Établir complètement l'expression du vecteur accélération dans le repère de Frenet, et comprendre pourquoi la formule des différences finies centrées est la bonne façon d'estimer une dérivée.
- Étudier des mouvements plus riches (freinage circulaire, roue qui roule, mouvement hélicoïdal) et mener une résolution de problème avec analyse critique.

Les passages signalés « *hors programme* » ne sont pas exigibles au baccalauréat : toutes les relations nécessaires y sont fournies.

Exercice 1 Établir l'expression de l'accélération dans le repère de Frenet



Un point M décrit, dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un cercle de centre O et de rayon R . Sa position est repérée par l'angle $\theta(t)$, croissant au cours du temps :

$$\overrightarrow{OM} = R \cos \theta \vec{i} + R \sin \theta \vec{j}.$$

On pose $\vec{u}_t = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ et $\vec{u}_n = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$. On rappelle que $\frac{d}{dt}(\cos \theta(t)) = -\theta'(t) \sin \theta(t)$ et $\frac{d}{dt}(\sin \theta(t)) = \theta'(t) \cos \theta(t)$.

- 1.1 Vérifier que $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ sont unitaires et orthogonaux. Montrer que $\vec{u}_n$ est dirigé de M vers O , et justifier que $\vec{u}_t$ est tangent au cercle.
- 1.2 En dérivant $\overrightarrow{OM}$, montrer que $\vec{v} = R \theta' \vec{u}_t$. En déduire que la valeur de la vitesse est $v = R \theta'$ et retrouver ainsi que $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.
- 1.3 Montrer que $\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \theta' \vec{u}_n$.
- 1.4 En dérivant l'écriture $\vec{v} = v \vec{u}_t$, établir que $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$.
- 1.5 Que devient cette expression lorsque le mouvement est uniforme ? Et lorsque le point ralentit ? Représenter $\vec{a}$ sur un schéma dans ces deux cas.

Exercice 2 Pourquoi la formule centrée ?



Pour exploiter un enregistrement de pas de temps τ , on estime la vitesse à la date t_n soit par la *formule centrée* $\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\tau}$, soit par la *formule décentrée* $\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau}$. On note $x_n = x(t_n)$ et $t_{n+1} - t_n = \tau$.

- 2.1 Le mouvement est d'abord rectiligne uniformément accéléré : $x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$. Établir l'expression de $v(t)$, puis montrer que la formule centrée donne *exactement* $v(t_n)$.
- 2.2 Montrer que, dans ce même cas, la formule décentrée donne exactement $v\left(t_n + \frac{\tau}{2}\right)$. Quelle erreur commet-on donc en l'attribuant à la date t_n ?
- 2.3 Le mouvement est maintenant décrit par $x(t) = 2,0 t^3$ (unités SI) et l'enregistrement est fait avec $\tau = 0,10$ s. Calculer la valeur exacte de v à la date $t = 0,50$ s, puis les deux estimations. Calculer l'écart relatif de chacune et conclure.

- 2.4 Pour $x(t) = ct^3$, montrer que la formule centrée donne $v(t_n) + c\tau^2$. Comment l'erreur évolue-t-elle si l'on divise le pas de temps par deux ? Quel inconvénient expérimental cela présente-t-il ?

Exercice 3 Quelle confiance accorder à la vitesse calculée ?



Le pointage d'une vidéo fournit la position du centre de masse d'une bille en chute, toutes les $\tau = 40$ ms. Chaque position est entachée d'une incertitude-type $u(x) = 1,0$ mm, tandis que le pas de temps de la caméra est connu très précisément. On utilise la formule centrée $v_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\tau}$, puis $a_n = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2\tau}$.

■ **DONNÉES** Incertitude-type composée de grandeurs indépendantes A, B, C (α, β, γ constantes) : $u(\alpha A + \beta B + \gamma C) = \sqrt{\alpha^2 u(A)^2 + \beta^2 u(B)^2 + \gamma^2 u(C)^2}$, en particulier $u(A - B) = \sqrt{u(A)^2 + u(B)^2}$ • écart normalisé $z = |x_{\text{mes}} - x_{\text{réf}}| / u(x_{\text{mes}})$, compatibilité si $z < 2$

- 3.1 Montrer que $u(v) = \frac{\sqrt{2}u(x)}{2\tau}$, puis calculer cette incertitude-type.
- 3.2 Le pointage donne $v_3 = 1,250 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Écrire le résultat de la mesure sous la forme $v_3 \pm u(v)$, avec un nombre de chiffres adapté.
- 3.3 Montrer que $a_n = \frac{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}{\tau^2}$. Pourquoi ne peut-on pas obtenir $u(a)$ en appliquant la relation $u(A - B)$ aux vitesses v_{n+1} et v_{n-1} ? Établir l'expression de $u(a)$ en fonction de $u(x)$ et de τ , puis la calculer. Commenter l'ordre de grandeur obtenu.
- 3.4 L'exploitation de l'enregistrement donne $a = 9,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Calculer l'écart normalisé avec la valeur de référence $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et conclure quant à la compatibilité des deux valeurs.
- 3.5 On double la fréquence de la caméra (le pas de temps est divisé par deux), l'incertitude de pointage restant la même. Par quel facteur $u(v)$ et $u(a)$ sont-elles multipliées ? En rapprochant ce résultat de la question 2.4, expliquer pourquoi il existe un pas de temps optimal, ni trop grand ni trop petit.

Exercice 4 Le freinage d'un manège



La nacelle d'un manège décrit un cercle de rayon $R = 6,0$ m à la vitesse $v_0 = 9,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. À la date $t = 0$, l'opérateur freine : la valeur de la vitesse décroît alors de façon affine et la nacelle s'arrête au bout de 6,0 s.

- 4.1 Établir l'expression de $v(t)$ pendant le freinage, puis calculer la composante tangentielle a_t du vecteur accélération. Quel est son signe ? Que traduit-il ?
- 4.2 Établir l'expression de la composante normale $a_n(t)$. Calculer a_n et la valeur de l'accélération à la date $t = 0$, puis à la date $t = 4,0$ s.
- 4.3 Montrer que la valeur de l'accélération décroît pendant tout le freinage, puis déterminer sa valeur à l'instant de l'arrêt. Le vecteur accélération est-il alors nul ?
- 4.4 Déterminer la date à laquelle $|a_t|$ et a_n sont égales, et l'angle que fait alors $\vec{a}$ avec $\vec{u}_n$.
- 4.5 La distance parcourue pendant le freinage est $s(t) = 9,0t - 0,75t^2$ (s en m) : le vérifier par dérivation, puis calculer la distance totale parcourue et la fraction de tour correspondante.

Exercice 5 La cycloïde : le mouvement d'un point de pneu



(Hors programme — pour aller plus loin ; toutes les relations sont fournies.) Une roue de vélo de rayon $R = 0,35$ m roule sans glisser sur une route horizontale ; le cycliste avance à la vitesse constante $V = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. On suit le point M du pneu qui touche initialement le sol. Son mouvement, dans le référentiel terrestre, est décrit par

$$x(t) = R(\theta - \sin \theta) \quad \text{et} \quad y(t) = R(1 - \cos \theta), \quad \text{avec } \theta = \omega t \text{ et } \omega = \frac{V}{R}.$$

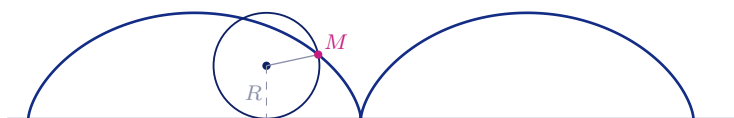


Figure 1 — La trajectoire du point M du pneu (cycloïde), pour deux tours de roue

- 5.1** Calculer ω . Vérifier que M touche le sol pour $\theta = 0$ et pour $\theta = 2\pi$, et calculer la distance parcourue par le vélo entre ces deux instants. Que représente-t-elle pour la roue ?
- 5.2** Établir les coordonnées du vecteur vitesse de M , puis montrer que sa norme vaut $v = 2R\omega \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$. On pourra utiliser $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.
- 5.3** En déduire la valeur de la vitesse de M lorsqu'il touche le sol, puis lorsqu'il est au sommet de la roue. Commenter ces deux résultats surprenants.
- 5.4** Établir les coordonnées du vecteur accélération de M et montrer que sa valeur est constante. La calculer. Vérifier que $\vec{a}$ est toujours dirigé de M vers le centre de la roue.

Exercice 6 Résolution de problème : jusqu'où peut-on centrifuger ?



Une ultracentrifugeuse de laboratoire sépare les constituants d'un mélange en soumettant les échantillons à une très forte accélération. Son rotor tourne à 60 000 tours par minute et les tubes sont placés entre 4,0 cm et 8,0 cm de l'axe de rotation. À titre de comparaison, le tambour d'un lave-linge, de rayon 24 cm, essore le linge à 1 400 tours par minute.

Déterminer l'intervalle des valeurs d'accélération subies par les échantillons dans l'ultracentrifugeuse, les exprimer en multiples de $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, et les comparer à celle que subit le linge lors de l'essorage. On discutera également la valeur de la vitesse atteinte par le bord des tubes. Toute démarche, même partielle, sera valorisée : le raisonnement, les hypothèses et les étapes de calcul devront apparaître clairement.

Exercice 7 Un mouvement hélicoïdal



(Hors programme — pour aller plus loin.) Dans un parking à étages, la rampe de sortie s'enroule autour d'un cylindre d'axe vertical. Le centre de masse G d'une voiture qui la descend est repéré, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{k}$ est vertical ascendant, par

$$x(t) = R \cos(\omega t), \quad y(t) = R \sin(\omega t), \quad z(t) = -ht,$$

avec $R = 8,0 \text{ m}$, $\omega = 0,25 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $h = 0,12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- 7.1** Décrire la trajectoire de G et calculer la durée d'un tour complet, ainsi que la hauteur dont la voiture descend pendant ce tour.
- 7.2** Établir les coordonnées du vecteur vitesse, puis montrer que sa norme $v = \sqrt{R^2\omega^2 + h^2}$ est constante. La calculer, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ puis en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
- 7.3** Établir les coordonnées du vecteur accélération. Montrer que $\vec{a}$ est horizontal, dirigé vers l'axe du cylindre, et calculer sa valeur.
- 7.4** Le mouvement est uniforme et pourtant l'accélération n'est pas nulle : expliquer. Comparer la valeur obtenue à celle que l'on aurait pour un mouvement circulaire uniforme de même rayon et de même période, et commenter.