

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 12



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac

Vecteurs, droites et plans de l'espace

QCM — Un cube repéré : décomposition, coplanarité, section plane, intersections

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (5 points et 7 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Dans l'exercice 2, toutes les réponses devront être justifiées par un calcul vectoriel : décomposition sur la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, colinéarité, coplanarité, résolution d'un système. Les figures demandées seront tracées en perspective cavalière, les arêtes cachées en pointillés.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●●○

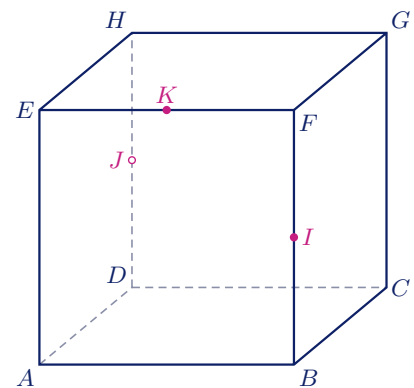
Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Dans les questions 1, 3, 4 et 5, $ABCDEFGH$ désigne un cube.

- 1.1** Le vecteur $\vec{AE} + \vec{EG} + \vec{GC}$ est égal à :
- a) $\vec{AC}$ b) $\vec{AG}$ c) $\vec{EC}$ d) $\vec{0}$
- 1.2** L'espace est muni d'un repère. On pose $\vec{u}(2; -1; 3)$, $\vec{v}(-1; 2; 1)$ et $\vec{w}(0; 3; 7)$. Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:
- a) est une base de l'espace b) est formé de vecteurs coplanaires
c) est formé de vecteurs colinéaires d) vérifie $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$
- 1.3** Les droites (AG) et (BH) sont :
- a) parallèles b) sécantes c) non coplanaires d) confondues
- 1.4** Le point M défini par $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$ est :
- a) le centre de la face $ABCD$ b) le milieu de $[AG]$
c) le centre de la face $EFGH$ d) le sommet G
- 1.5** Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$. La droite (CG) et le plan $\mathcal{P}$ sont :
- a) sécants en un point b) strictement parallèles
c) tels que (CG) est incluse dans $\mathcal{P}$ d) dans une position indéterminable

Exercice 2 Un cube repéré

7 pts ●●○

$ABCDEFGH$ est le cube de la figure 1. L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de l'arête $[BF]$, J le milieu de l'arête $[DH]$ et K le milieu de l'arête $[EF]$. Les quatre parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque, mais les parties B, C et D utilisent les résultats de la partie A.

Figure 1 — Le cube $ABCDEFGH$

Partie A — Décomposition et coplanarité

- 2.1** Donner les coordonnées des huit sommets du cube, puis celles des points I , J et K .
- 2.2** Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BD}$. Quelle est la nature du quadrilatère $B I J D$?
- 2.3** Démontrer que le triplet $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ est une base de l'espace.
- 2.4** Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$. Qu'en déduit-on pour les points A , I , J et G ?

Partie B — La section du cube par le plan (AIJ)

- 2.5** Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JG}$ et préciser la nature du quadrilatère $A I G J$.
- 2.6** Reproduire la figure 1 et construire la section du cube par le plan (AIJ) . On justifiera chacun de ses quatre côtés en précisant la face du cube sur laquelle il se trouve.
- 2.7** Démontrer que les diagonales $[AG]$ et $[IJ]$ de ce quadrilatère se coupent en leur milieu commun O , et que O est le centre du cube.
- 2.8** Le point $Q(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ appartient-il au plan (AIJ) ? Justifier. Appartient-il au cube?
- 2.9** Démontrer que la droite (EC) est sécante au plan (AIJ) et que leur point d'intersection est le point O .

Partie C — Intersections et positions relatives

- 2.10** On cherche le point d'intersection P de la droite (EB) et du plan (AIJ) . Traduire $P \in (EB)$ par $\overrightarrow{EP} = t \overrightarrow{EB}$ et $P \in (AIJ)$ par $\overrightarrow{AP} = s \overrightarrow{AI} + u \overrightarrow{AJ}$, puis résoudre le système obtenu.
- 2.11** En déduire les coordonnées de P , puis vérifier que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$: le point P appartient donc au côté $[AI]$ de la section.
- 2.12** Démontrer de même que la droite (ED) coupe le plan (AIJ) en un point P' tel que $\overrightarrow{AP'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AJ}$.
- 2.13** Démontrer que le point K n'appartient pas au plan (AIJ) , puis préciser la position relative de la droite (KG) et de ce plan.
- 2.14** Démontrer que les droites (IJ) et (KG) ne sont pas coplanaires.

Partie D — Un plan parallèle

- 2.15** Soit S le plan passant par K et dirigé par $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$. Justifier que S et (AIJ) sont strictement parallèles.
- 2.16** Démontrer que le milieu N de $[EH]$ et le point L de l'arête $[AE]$ défini par $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AE}$ appartiennent tous deux à S .
- 2.17** En déduire la section du cube par S : préciser sa nature et la construire sur la figure reproduite à la question 2.6.