

Fiche de cours Vecteurs, droites et plans de l'espace

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 VECTEURS DE L'ESPACE

Définition. À tout couple de points $(A; B)$ de l'espace on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$, caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur : c'est le vecteur de la **translation** qui envoie A sur B . On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Propriété. Toutes les règles de calcul du plan restent valables dans l'espace : **relation de Chasles** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, et si I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M .

Définition. Une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ est un vecteur $a_1\vec{u}_1 + \dots + a_p\vec{u}_p$, où les a_i sont des réels.

2 COLINÉARITÉ ET COPLANARITÉ

Définition. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété. A, B, C sont **alignés** $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Définition. Trois vecteurs sont **coplanaires** lorsqu'ils admettent des représentants situés dans un même plan.

Propriété. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires $\iff$ il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Quatre points A, B, C, D sont coplanaires $\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ le sont.

3 DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Propriété — droite. La droite passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Propriété — plan. Le plan passant par A et **dirigé** par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$, avec $s, t \in \mathbb{R}$. Trois points non alignés définissent un unique plan.

Remarque. Une droite est incluse dans un plan dès que deux de ses points le sont ; deux droites sécantes définissent un plan.

Propriété — parallélisme. Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Une droite est parallèle à un plan si un vecteur directeur de la droite est coplanaire avec deux vecteurs dirigeant le plan. Deux plans sont parallèles si les vecteurs qui dirigent l'un dirigent aussi l'autre.

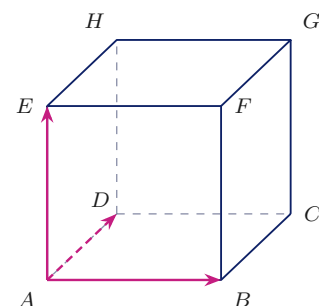


Figure 1 — Le cube $ABCDEFGH$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

4 POSITIONS RELATIVES

■ FORMULAIRE — les configurations à connaître

- **Deux droites** : coplanaires (alors sécantes en un point, ou strictement parallèles, ou confondues) ou **non coplanaires**. Deux droites non coplanaires n'ont aucun point commun sans être parallèles : c'est propre à l'espace.
- **Une droite et un plan** : la droite est incluse dans le plan, ou strictement parallèle au plan, ou sécante au plan en un unique point.
- **Deux plans** : confondus, strictement parallèles, ou sécants suivant une droite.
- **Théorème du toit** : si $d \subset \mathcal{P}$, $d' \subset \mathcal{P}'$, $d \parallel d'$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta$, alors Δ est parallèle à d et à d' .
- **Section plane** d'un solide : deux points d'une même face se joignent par un segment ; deux faces parallèles sont coupées suivant deux droites parallèles.

5 BASES, REPÈRES ET COORDONNÉES

Définition. Trois vecteurs *non coplanaires* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forment une **base** de l'espace : tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière **unique** $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le triplet $(x; y; z)$ est le triplet des **coordonnées** de $\vec{u}$. Un **repère** est la donnée d'un point O et d'une base : M a pour coordonnées celles de $\overrightarrow{OM}$.

Méthode — reconnaître une base. Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une base $\iff$ ils ne sont pas coplanaires. Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, cela revient à montrer que $\vec{w}$ ne s'écrit pas $a\vec{u} + b\vec{v}$: on résout le système obtenu en coordonnées et on montre qu'il n'a pas de solution.

Propriété. Dans un repère, si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ et le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2})$. Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $\lambda\vec{u}$ s'obtiennent composante par composante.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Décomposer un vecteur d'une figure de l'espace (cube, pavé, tétraèdre) sur une base, à l'aide de la relation de Chasles.
- Démontrer que trois points sont alignés, que deux droites sont parallèles, que quatre points sont coplanaires.
- Caractériser une droite par un point et un vecteur directeur, un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires.
- Déterminer la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans ; construire une section plane simple.
- Calculer des coordonnées de vecteurs, de milieux, et vérifier qu'une famille de trois vecteurs est une base.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — décomposition dans une base

Dans le cube $ABCDEFGH$ muni de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et, par Chasles, $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

★ EXEMPLE — coplanarité avec des coordonnées

Soit $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 1)$, $C(0; 2; 4)$ et $D(1; 5; 5)$. On a $\overrightarrow{AB}(2; 1; -1)$, $\overrightarrow{AC}(-1; 2; 2)$ et $\overrightarrow{AD}(0; 5; 3)$. Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, les quatre points sont coplanaires.

★ EXEMPLE — position relative de deux droites

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure 1, $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$: $ADGF$ est un parallélogramme, donc $(AF) \parallel (DG)$. En revanche $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ (sa composante sur $\overrightarrow{AD}$ n'est pas nulle) : les points A, B, E, G ne sont pas coplanaires, donc les droites (AB) et (EG) ne sont pas coplanaires.

★ EXEMPLE — droite parallèle à un plan

Toujours dans le cube, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: ce vecteur directeur de (EG) est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, qui dirigent le plan (ABC) . Comme $E \notin (ABC)$, la droite (EG) est strictement parallèle au plan (ABC) .

✖ PIÈGES

- Dans l'espace, deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles : elles peuvent être **non coplanaires**.
- Trois vecteurs coplanaires ne forment jamais une base : vérifier la non-coplanarité avant de parler de base ou de repère.
- Deux plans distincts ne se coupent jamais en un seul point : leur intersection est vide ou c'est une droite entière.
- Pour prouver que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires en montrant que $\vec{w}$ ne s'écrit pas $a\vec{u} + b\vec{v}$, vérifier d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : sinon, les trois vecteurs peuvent être coplanaires sans que $\vec{w}$ soit combinaison de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Pour conclure qu'une droite est *strictement* parallèle à un plan, vérifier en plus qu'un de ses points n'appartient pas au plan.