

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 12



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Vecteurs, droites et plans de l'espace

Les bases : vecteurs et relation de Chasles, colinéarité, coplanarité, droites et plans, repères

6 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 1 h 45 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Utiliser la relation de Chasles et les combinaisons linéaires sur une figure de l'espace ; démontrer un alignement, un parallélisme, une coplanarité.
- Caractériser une droite par un point et un vecteur directeur, un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires ; donner des positions relatives.
- Calculer des coordonnées dans un repère de l'espace et décomposer un vecteur sur une base.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Vecteurs.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$; si I est le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M .
- **Colinéarité.** $\vec{u}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ colinéaires $\iff$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. A, B, C alignés $\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ colinéaires ; $(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ colinéaires.
- **Coplanarité.** $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires s'ils ont des représentants dans un même plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\iff$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. A, B, C, D coplanaires $\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ coplanaires.
- **Droites et plans.** Droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$: ensemble des M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Plan passant par A dirigé par $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires : ensemble des M tels que $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$. Positions relatives : deux droites sont coplanaires (sécantes, parallèles) ou non coplanaires ; une droite et un plan sont sécants (un point) ou parallèles ; deux plans sont sécants (une droite) ou parallèles.
- **Base et repère.** Trois vecteurs non coplanaires forment une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: tout vecteur s'écrit de manière unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Dans un repère : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$ et le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2})$.

Exercice 1 Lire des vecteurs sur un pavé droit

●○○

$ABCDEFGH$ est le pavé droit de la figure 1.

- 1.1 Citer les trois arêtes du pavé, autres que $[AB]$, qui définissent un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$.
- 1.2 Simplifier et donner le résultat sous la forme $\overrightarrow{MN}$, M et N étant deux sommets du pavé.
 - a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 - b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}$
 - c) $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$
 - d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
- 1.3 Déterminer les images des points B, C et D , puis celle du segment $[BC]$, par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.
- 1.4 Recopier et compléter.
 - a) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \dots$
 - b) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \dots + \dots$

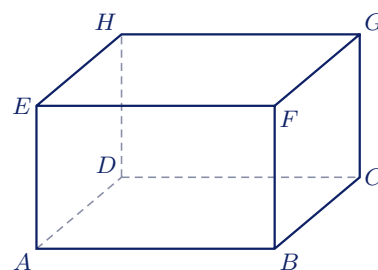


Figure 1 — Le pavé droit $ABCDEFGH$

Exercice 2 Relation de Chasles et combinaisons linéaires

●○○

A, B, C et D sont quatre points quelconques de l'espace.

2.1 Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB}$ d) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$

2.2 Soit I le milieu de $[AB]$. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Exercice 3 Colinéarité et alignement

●○○

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(3; -1; 2)$, $C(-3; 8; -7)$ et $D(2; 0; 1)$.

3.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3.2 Démontrer que les points A, B et C sont alignés. Les points A, B et D le sont-ils?

3.3 Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ et du milieu J de $[BC]$, puis le réel m pour que A, B et $F(m; -4; 5)$ soient alignés.

Exercice 4 Décomposer sur trois arêtes d'un cube

●●○

$ABCDEFGH$ est le cube de la figure 2; I est le milieu de $[EF]$ et J celui de $[FG]$. On travaille avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

4.1 Justifier que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

4.2 Exprimer $\overrightarrow{AI}$, puis $\overrightarrow{AJ}$, en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

4.3 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AI}$ sont-ils coplanaires? Et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AJ}$?

4.4 Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire pour les droites (IJ) et (AC) ?

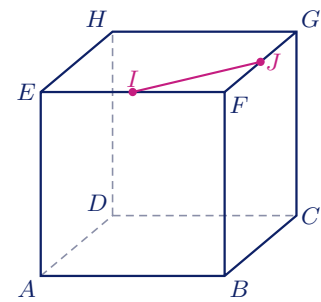


Figure 2 — Le cube $ABCDEFGH$

Exercice 5 Droites, plans et positions relatives

●●○

On reprend le cube $ABCDEFGH$ et les points I et J de la figure 2.

5.1 Parmi les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{HD}$, lesquels sont des vecteurs directeurs de la droite (BF) ? Justifier.

5.2 Donner deux vecteurs non colinéaires dirigeant le plan (ABC) , puis un autre sommet de ce plan.

5.3 Pour chaque couple ci-dessous, préciser la position relative des deux objets, la justifier en une ligne et, lorsque l'intersection n'est pas vide, la déterminer.

- a) (AE) et (CG) ; b) (AB) et (CG) ; c) (BD) et (EG) ;
d) (AF) et le plan (DCG) ; e) (EC) et le plan (ABC) ; f) les plans (ABC) et (EFG) .

Exercice 6 Un repère associé au cube

●●○

On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ associé au cube de la figure 2.

6.1 Donner les coordonnées des huit sommets du cube.

6.2 P est le milieu de $[EH]$ et K le centre de la face $BCGF$. Donner les coordonnées de P , K et $\overrightarrow{PK}$.

6.3 Démontrer que la droite (PK) est parallèle au plan (ABF) . (On pourra décomposer $\overrightarrow{PK}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.)

6.4 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{PK}$ forment-ils une base de l'espace? Justifier.