

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 12

Exercices 2

 Vecteurs, droites et plans de l'espace

Problèmes : tétraèdre des milieux, sections planes, plans parallèles, repérage d'un entrepôt

7 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 15 · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

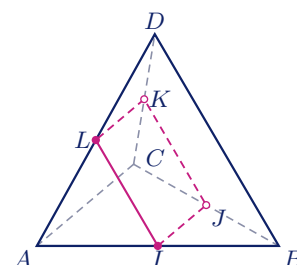
- Démontrer un alignement, un parallélisme ou une coplanarité par le calcul vectoriel.
- Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan, construire la section d'un cube par un plan.
- Modéliser une situation concrète (entrepôt, câbles) dans un repère de l'espace et y répondre par le calcul.

Exercice 1 Le parallélogramme des milieux d'un tétraèdre

●●○

$ABCD$ est un tétraèdre (figure 1). On note I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

- 1.1 Démontrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, puis que $\vec{LK} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
- 1.2 En déduire la nature de $IJKL$, puis que I, J, K et L sont coplanaires.
- 1.3 Justifier que (IK) et (JL) sont sécantes en un point G , puis que $\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.
- 1.4 Soient M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de $[BD]$. Démontrer que G est aussi le milieu de $[MN]$.

Figure 1 — Le tétraèdre $ABCD$

Exercice 2 Un parallélogramme caché dans le cube

●●○

$ABCDEFGH$ est un cube. L'espace est muni du repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[GH]$ et O le point de coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

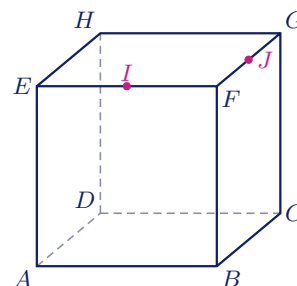
- 2.1 Donner les coordonnées des points C, E, I et J .
- 2.2 Démontrer que $\vec{EI} = \vec{JC}$: quelle est la nature de $EICJ$? En déduire que E, I, C, J sont coplanaires.
- 2.3 Démontrer que O est le milieu de $[EC]$, de $[IJ]$ et de $[AG]$: comment appelle-t-on ce point ?
- 2.4 Le point M , centre de la face $BCGF$, appartient-il au plan (EIC) ? Justifier par le calcul.

Exercice 3 Une section plane du cube

●●○

Le cube $ABCDEFGH$ de la figure 2 est muni du repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$; I est le milieu de $[EF]$ et J celui de $[FG]$. On pose $\mathcal{P} = (AIJ)$.

- 3.1 Démontrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. Que peut-on en déduire pour les droites (IJ) et (AC) ?
- 3.2 Démontrer que le point C appartient au plan $\mathcal{P}$.
- 3.3 Reproduire la figure 2 et construire la section du cube par le plan $\mathcal{P}$: on justifiera chaque côté en précisant sur quelle face du cube il se trouve.
- 3.4 Préciser la nature du quadrilatère $AIRC$. Est-ce un parallélogramme ? Justifier.

Figure 2 — Le cube et les points I et J

Exercice 4 Deux plans parallèles dans le cube



On reprend le cube $ABCDEFGH$ et le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On considère les plans $\mathcal{Q} = (AFH)$ et $\mathcal{R} = (BDG)$.

- 4.1 Démontrer que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$, puis que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF}$.
- 4.2 En déduire que les droites (BG) et (BD) , sécantes en B , sont toutes deux parallèles au plan $\mathcal{Q}$, puis que les plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont parallèles.
- 4.3 Le centre $O(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ du cube appartient-il à l'un de ces deux plans ? Justifier par le calcul.
- 4.4 Soit M le point d'intersection de (EC) et de $\mathcal{Q}$. Traduire $M \in (EC)$ par $\overrightarrow{EM} = t\overrightarrow{EC}$ et $M \in \mathcal{Q}$ par $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AF} + b\overrightarrow{AH}$; résoudre, puis vérifier que $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

Exercice 5 Les câbles d'un entrepôt



Un entrepôt a la forme du pavé droit $ABCDEFGH$ de la figure 3 : $AB = 20$ m, $AD = 12$ m et $AE = 8$ m. On munit l'espace du repère d'origine A dont les axes sont portés par les arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$, l'unité étant le mètre : ainsi $B(20; 0; 0)$, $D(0; 12; 0)$ et $E(0; 0; 8)$.

- 5.1 Donner les coordonnées des points C , F , G et H .
- 5.2 Un câble tendu relie E à C , un autre relie F à D . Démontrer que les points E , C , F et D sont coplanaires, puis que les deux câbles se coupent en un point Ω dont on donnera les coordonnées.
- 5.3 Un troisième câble relie A à G . Démontrer qu'il passe lui aussi par Ω .
- 5.4 Un projecteur est fixé au point $P(15; 9; 2)$. Vérifier que P appartient au câble $[EC]$ et préciser à quelle hauteur du sol il se trouve.
- 5.5 Un quatrième câble relie le milieu R de l'arête $[EF]$ au sommet C . Ce câble rencontre-t-il le câble $[AG]$? Justifier.

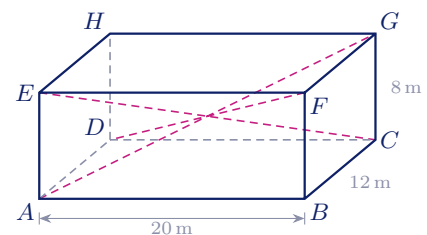


Figure 3 — L'entrepôt et ses trois premiers câbles

Exercice 6 Changer de base



On reprend le cube $ABCDEFGH$ et le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AF}$.

- 6.1 Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace. (On pourra montrer que $\vec{w}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.)
- 6.2 Décomposer $\overrightarrow{AD}$, puis $\overrightarrow{AE}$, sur la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 6.3 En déduire la décomposition de $\overrightarrow{AG}$ sur cette base, puis vérifier le résultat par le calcul des coordonnées.
- 6.4 Donner les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$: appartient-il au plan (ABF) ?

Exercice 7 Vrai ou faux ?



Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse : une réponse « vrai » doit être démontrée, une réponse « faux » justifiée par un contre-exemple (on pourra en chercher dans un cube).

- 7.1 Si deux droites de l'espace n'ont aucun point commun, alors elles sont parallèles.
- 7.2 Si deux droites sont parallèles à un même plan, alors elles sont parallèles entre elles.
- 7.3 Si trois vecteurs non nuls sont deux à deux non colinéaires, alors ils forment une base de l'espace.
- 7.4 Dans un cube $ABCDEFGH$, les droites (AE) et (CH) ne sont pas coplanaires.
- 7.5 Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.