

Approfondissement

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Pour aller plus loin : démonstrations du cours, théorème du toit, tétraèdre régulier, section hexagonale, barycentres

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Les démonstrations du cours



Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace, c'est-à-dire un triplet de vecteurs non coplanaires.

- 1.1 Démontrer que si $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{0}$ avec x, y, z réels, alors $x = y = z = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant, par exemple, $x \neq 0$.)
- 1.2 En déduire que tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace admet *au plus* une décomposition de la forme $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: les coordonnées d'un vecteur dans une base sont uniques.
- 1.3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$ un troisième vecteur. Démontrer que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, et que le couple $(a; b)$ est alors unique.
- 1.4 Soient A un point de l'espace, $\mathcal{P}$ le plan passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$. Démontrer que d est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 2 Le théorème du toit



Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans *sécants* suivant une droite Δ . On suppose qu'une droite d incluse dans $\mathcal{P}$ et une droite d' incluse dans $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

- 2.1 Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur commun à d et d' , et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ . Justifier que $\vec{u}$ dirige à la fois $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
- 2.2 Par l'absurde, supposer $\vec{u}$ et $\vec{w}$ non colinéaires : démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ seraient alors confondus. Conclure : Δ est parallèle à d et à d' — c'est le *théorème du toit*.
- 2.3 **Application.** $ABCD$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$. Justifier que les plans (IJD) et (BCD) sont sécants, puis démontrer que leur droite d'intersection est la parallèle à (BC) passant par D . Faire une figure.

Exercice 3 Le tétraèdre régulier caché dans le cube



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note O le centre du cube.

- 3.1 Démontrer que les points A, C, F et H ne sont pas coplanaires : ils sont les sommets d'un tétraèdre.
- 3.2 Justifier que les six arêtes de ce tétraèdre sont des diagonales de faces du cube. Qu'en déduit-on sur leurs longueurs ?
- 3.3 Déterminer les coordonnées des milieux des six arêtes du tétraèdre $ACFH$ et vérifier que ce sont exactement les centres des six faces du cube.
- 3.4 Démontrer que les trois droites joignant les milieux de deux arêtes *opposées* (sans sommet commun) se coupent en O .
- 3.5 Démontrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OH} = \vec{0}$: O est le centre de gravité de $ACFH$ (voir l'exercice 5).
- 3.6 Les quatre autres sommets du cube, B, D, E et G , sont-ils eux aussi les sommets d'un tétraèdre régulier ? Justifier.

Exercice 4 La section hexagonale du cube



$ABCDEFGH$ est le cube de la figure 1, muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[BC], [CD], [DH], [HE], [EF]$ et $[FB]$.

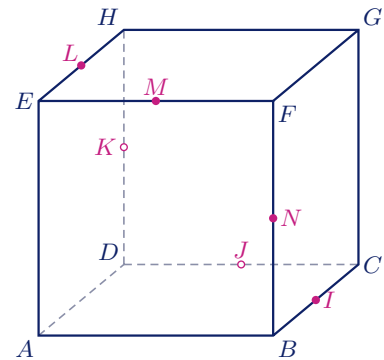


Figure 1 — Les six milieux du cube

- 4.1 Donner les coordonnées de ces six points.
- 4.2 Démontrer que $\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{IN}$. En déduire que I, J, K, L, M et N sont coplanaires.
- 4.3 Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IN}$: les côtés opposés de l'hexagone $IJKLMN$ sont parallèles et de même longueur.
- 4.4 Démontrer que les trois diagonales $[IL]$, $[JM]$ et $[KN]$ ont le même milieu, le centre O du cube.
- 4.5 Vérifier que les six côtés ont la même longueur, égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ fois l'arête du cube : l'hexagone est équilatéral (on démontrera au chapitre suivant qu'il est en fait régulier). Reproduire la figure 1 et tracer cette section.

Exercice 5 Le centre de gravité d'un tétraèdre



$ABCD$ est un tétraèdre. On note G_A, G_B, G_C et G_D les centres de gravité des faces BCD, ACD, ABD et ABC ; on rappelle que le centre de gravité du triangle BCD est le point G_A tel que $\overrightarrow{G_AB} + \overrightarrow{G_AC} + \overrightarrow{G_AD} = \vec{0}$. On travaille dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

- 5.1 Démontrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, puis que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$.
- 5.2 Donner les coordonnées de G , de G_A , de G_B , de G_C et de G_D dans le repère choisi.
- 5.3 Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$. En déduire que les quatre droites $(AG_A), (BG_B), (CG_C)$ et (DG_D) — les médianes du tétraèdre — sont concourantes en G .
- 5.4 Démontrer que $\overrightarrow{G_AG_B} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{G_AG_C} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. En déduire que les plans $(G_AG_BG_C)$ et (ABC) sont parallèles.
- 5.5 Démontrer enfin que $\overrightarrow{GG_A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$, et que la même relation vaut pour les trois autres sommets.

Exercice 6 Barycentres (hors programme — pour aller plus loin)



Soient A et B deux points de l'espace et α, β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. On appelle *barycentre* du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ tout point G vérifiant $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

- 6.1 Démontrer qu'un tel point existe et qu'il est unique, et que $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$. Que retrouve-t-on pour $\alpha = \beta = 1$?
- 6.2 La définition s'étend à trois points : G est le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ lorsque $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}}{\alpha + \beta + \gamma}$, puis que G appartient toujours au plan (ABC) lorsque A, B et C ne sont pas alignés.
- 6.3 Dans le cube $ABCDEFGH$ muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, déterminer les coordonnées du barycentre S de $\{(B, 1); (D, 1); (E, 1)\}$. Démontrer que S appartient à la grande diagonale $[AG]$ du cube et préciser le réel t tel que $\overrightarrow{AS} = t \overrightarrow{AG}$.