

Fiche de cours

Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Définition. Des épreuves sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'influe pas sur les probabilités des suivantes. Une issue de la succession de n épreuves est un n -uplet de résultats.

Propriété. La probabilité d'une issue d'une succession d'épreuves indépendantes est le **produit** des probabilités de ses composantes : c'est le produit des probabilités portées par le chemin correspondant de l'arbre.

Remarque. Outils toujours disponibles : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ avec $P(A) \neq 0$, la **formule des probabilités totales** $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, et $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$. Sur un arbre : on multiplie le long d'un chemin, on additionne les chemins qui réalisent l'événement.

2 ÉPREUVE ET LOI DE BERNOULLI

Définition. Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p \in [0; 1]$ est une expérience à deux issues : le **succès** S , de probabilité p , et l'**échec** $\bar{S}$, de probabilité $1 - p$.

Définition. La variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p : $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$, et

$$E(X) = p, \quad V(X) = p(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}.$$

Définition. Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , identiques et **indépendantes**.

3 LOI BINOMIALE

Définition. Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$. Elle prend ses valeurs dans $\{0; 1; \dots; n\}$.

Théorème. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Idée : un chemin réalisant k succès a pour probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$, et il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les rangs des k succès.

Propriété. $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$ (démontré au chapitre suivant).

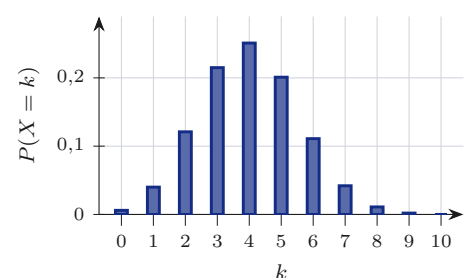


Figure 1 — Loi $\mathcal{B}(10; 0,4)$: le maximum est atteint près de $E(X) = 4$.

4 CALCULS ET PROBLÈMES DE SEUIL

■ FORMULAIRE — X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$

- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$; $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$; $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$.
- La calculatrice donne $P(X = k)$ (loi binomiale) et $P(X \leq k)$ (loi binomiale *cumulée*) : toute probabilité se ramène à ces deux touches.
- **Seuil** : chercher le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq \alpha$ revient à résoudre $(1 - p)^n \leq 1 - \alpha$ (avec $0 < p < 1$ et

$0 < \alpha < 1$), donc $n \geq \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}$ (le sens change car $\ln(1-p) < 0$); sinon, on balaie les valeurs de n ou k avec la calculatrice ou un algorithme.

- **Intervalle** $I = [a; b]$ tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$: on choisit a le plus grand possible avec $P(X \leq a-1) \leq \alpha/2$, et b le plus petit possible avec $P(X \leq b) \geq 1 - \alpha/2$.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Représenter une succession d'épreuves indépendantes par un arbre et calculer la probabilité d'une issue par un produit.
- Justifier qu'une situation est un schéma de Bernoulli (épreuves identiques, indépendantes, deux issues) et identifier n , p et le succès.
- Calculer $P(X = k)$ par la formule, puis $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$, $P(a \leq X \leq b)$ à la calculatrice.
- Calculer et interpréter $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- Résoudre un problème de seuil, de comparaison ou d'optimisation, et déterminer un intervalle I tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — reconnaître une loi binomiale

On prélève au hasard 10 pièces dans une production très nombreuse dont 40 % sont marquées. Les prélèvements sont assimilés à 10 épreuves identiques et indépendantes, de succès « la pièce est marquée » ($p = 0,4$) : X , nombre de pièces marquées, suit $\mathcal{B}(10; 0,4)$.

★ EXEMPLE — calculs de probabilités

Avec $X \sim \mathcal{B}(10; 0,4)$: $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,4^4 \times 0,6^6 \approx 0,251$; à la calculatrice $P(X \leq 3) \approx 0,382$, donc $P(X \geq 4) \approx 0,618$ et $P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) \approx 0,666$. Enfin $E(X) = 4$, $V(X) = 2,4$ et $\sigma(X) \approx 1,55$.

★ EXEMPLE — problème de seuil

Une machine produit 30 % de pièces d'un certain type; la production est assez importante pour assimiler les prélèvements à des tirages indépendants. Combien de pièces prélever pour obtenir au moins une pièce de ce type avec une probabilité d'au moins 0,95? Le nombre X de pièces de ce type parmi les n prélevées suit $\mathcal{B}(n; 0,3)$: $P(X \geq 1) = 1 - 0,7^n \geq 0,95 \iff 0,7^n \leq 0,05 \iff n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,7} \approx 8,4$. Il faut donc $n = 9$ pièces.

✖ PIÈGES

- Vérifier les trois conditions du schéma de Bernoulli : deux issues, épreuves identiques, épreuves indépendantes. Un tirage sans remise dans une petite population n'est pas binomial.
- Ne pas oublier le coefficient $\binom{n}{k}$: $p^k(1-p)^{n-k}$ n'est que la probabilité d'un chemin.
- $P(X \geq k) \neq 1 - P(X \leq k)$: la bonne formule est $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$.
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ et non $np(1-p)$; $E(X) = np$ n'est pas forcément une valeur prise par X .
- Identifier clairement le succès : si le succès est l'événement contraire de celui de l'énoncé, le paramètre devient $1 - p$.