

Exercices 2

Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Problèmes : QCM au hasard, contrôle qualité, sondage, seuils, comparaison, simulation en Python, validation d'un modèle

8 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser une situation concrète par un schéma de Bernoulli en justifiant les trois conditions, puis exploiter la loi binomiale obtenue (probabilités, espérance, écart type).
- Combiner arbre pondéré, formule des probabilités totales et loi binomiale dans un même problème.
- Résoudre un problème de seuil, comparer deux stratégies, déterminer un intervalle I tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$, écrire ou compléter un algorithme Python.

Exercice 1 Répondre au hasard à un QCM

●●○

Un QCM comporte 12 questions; chaque question propose 4 réponses dont une seule est exacte. Un élève répond au hasard à chacune des questions, indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de ses bonnes réponses; la figure 1 représente la loi de X .

- 1.1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 1.2 Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter $E(X)$ dans le contexte.
- 1.3 Calculer $P(X = 3)$ et $P(X \leq 1)$ (arrondis à 10^{-4}) et vérifier la cohérence avec la figure 1.
- 1.4 L'élève obtient la moyenne s'il donne au moins 6 bonnes réponses. Calculer la probabilité de cet événement (arrondi à 10^{-4}), puis celle d'obtenir au moins 9 bonnes réponses. Commenter.

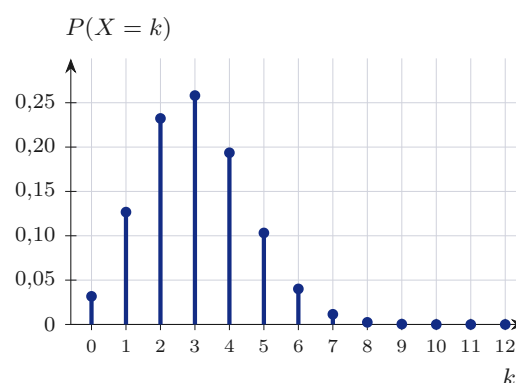


Figure 1 — La loi de X

Exercice 2 Deux chaînes de production

●●○

Une entreprise fabrique des cartes électroniques sur deux chaînes. La chaîne A produit 60 % des cartes et 3 % des cartes qu'elle produit sont défectueuses; la chaîne B produit les 40 % restants et 5 % de ses cartes sont défectueuses. On prélève une carte au hasard dans la production et on note A (resp. B) l'événement « la carte provient de la chaîne A (resp. B) » et D l'événement « la carte est défectueuse ».

- 2.1 Représenter la situation par un arbre pondéré.
- 2.2 Démontrer que $P(D) = 0,038$.
- 2.3 La carte prélevée est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la chaîne A ? Donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible, puis l'arrondi à 10^{-3} .
- 2.4 On prélève maintenant au hasard 50 cartes dans la production; celle-ci est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note Y le nombre de cartes défectueuses. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis calculer $E(Y)$.
- 2.5 Calculer $P(Y = 0)$, $P(Y \leq 3)$ et $P(Y \geq 2)$ (arrondis à 10^{-4}).

- 2.6** L'entreprise refuse un échantillon de 50 cartes dès qu'il contient au moins 5 cartes défectueuses. Calculer la probabilité qu'un échantillon soit refusé (arrondi à 10^{-4}).

Exercice 3 Un sondage



Avant une consultation, 52 % des électeurs d'une grande ville déclarent approuver un projet municipal. On interroge au hasard 100 électeurs de cette ville ; l'effectif de la population permet d'assimiler ce sondage à un tirage avec remise. On note X le nombre d'électeurs favorables parmi les 100 personnes interrogées.

- 3.1** Préciser la loi de X , puis calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-2}).
- 3.2** Calculer la probabilité qu'au plus 45 des personnes interrogées soient favorables au projet (arrondi à 10^{-4}).
- 3.3** Calculer $P(42 \leq X \leq 62)$ et $P(43 \leq X \leq 61)$ (arrondis à 10^{-4}).
- 3.4** En déduire le plus petit entier h tel que $P(52 - h \leq X \leq 52 + h) \geq 0,95$, puis l'intervalle I correspondant. Comparer l'amplitude de I à $\sigma(X)$.
- 3.5** Un sondage donne 47 personnes favorables sur 100. Ce résultat remet-il en cause le taux annoncé ? Justifier à l'aide de I .

Exercice 4 Un défaut rare



Un atelier produit des vérins hydrauliques ; 4 % d'entre eux présentent une micro-fuite. Un technicien contrôle n vérins choisis au hasard dans la production, ce contrôle étant assimilé à un tirage avec remise. On note X_n le nombre de vérins présentant une micro-fuite parmi les n contrôlés.

- 4.1** Préciser la loi de X_n et démontrer que $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,96^n$.
- 4.2** Calculer $P(X_{25} \geq 1)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 4.3** Le technicien souhaite détecter au moins une micro-fuite avec une probabilité d'au moins 0,99. Déterminer par le calcul le nombre minimal de vérins qu'il doit contrôler.
- 4.4** La fonction Python ci-contre doit renvoyer ce nombre minimal pour un seuil s donné. Recopier et compléter les lignes 3 et 5, puis indiquer ce que renvoie l'appel `seuil(0.99)`.

```

1 def seuil(s):
2     n = 0
3     p = ...
4     while p < s:
5         n = ...
6         p = 1 - 0.96**n
7     return n

```

Exercice 5 Le pari du chevalier de Méré



Au XVII^e siècle, le chevalier de Méré propose deux paris, tous les dés utilisés étant équilibrés et les lancers indépendants :

- **pari 1** : obtenir *au moins un* 6 en lançant quatre fois un dé ;
- **pari 2** : obtenir *au moins un* double 6 en lançant vingt-quatre fois une paire de dés.

- 5.1** Pour le pari 1, on note X le nombre de 6 obtenus. Préciser la loi de X , puis démontrer que la probabilité de gagner vaut $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$ et en donner l'arrondi à 10^{-4} .
- 5.2** Justifier que la probabilité d'obtenir un double 6 en lançant une paire de dés vaut $1/36$. Pour le pari 2, on note Y le nombre de doubles 6 obtenus : préciser la loi de Y et calculer la probabilité de gagner (arrondi à 10^{-4}).
- 5.3** Le chevalier de Méré pensait les deux paris équivalents, au motif que $4 \times 6 = 24$ et que les probabilités élémentaires $1/6$ et $1/36$ sont dans le rapport 6. Que penser de ce raisonnement ? Lequel des deux paris faut-il choisir ?
- 5.4** Combien de lancers d'une paire de dés faut-il effectuer, au minimum, pour que la probabilité d'obtenir au moins un double 6 dépasse celle du pari 1 ?

Exercice 6 Simuler un schéma de Bernoulli



Le programme ci-contre simule des schémas de Bernoulli. La fonction `random()` du module `random` renvoie un nombre décimal aléatoire de l'intervalle $[0; 1[$, chaque sous-intervalle de $[0; 1[$ ayant une probabilité d'être atteint égale à sa longueur.

- 6.1** Justifier que, à la ligne 6, la probabilité que la condition `random() < p` soit vraie vaut exactement p . Que représente alors la valeur renvoyée par `succes(n, p)` ?
- 6.2** On exécute `succes(20, 0.3)`. Quelles sont les valeurs possibles du résultat ? Quelle est sa valeur moyenne à long terme ?
- 6.3** Recopier et compléter la ligne 13 pour que `frequence(N, n, p, k)` renvoie la fréquence des simulations ayant donné exactement k succès.
- 6.4** L'appel `frequence(10000, 20, 0.3, 6)` a renvoyé 0,1893. Comparer à la valeur théorique correspondante et commenter.

```

1  from random import random
2
3  def succes(n, p):
4      c = 0
5      for i in range(n):
6          if random() < p:
7              c = c + 1
8      return c
9
10 def frequence(N, n, p, k):
11     c = 0
12     for i in range(N):
13         if ... :
14             c = c + 1
15     return c / N

```

Exercice 7 Le format d'un match



Deux joueuses de tennis, Ana et Bianca, s'affrontent. À chaque set, Ana l'emporte avec la probabilité 0,6, indépendamment des sets précédents. On envisage deux formats : un match en 3 sets, remporté par la joueuse qui gagne au moins 2 sets, et un match en 5 sets, remporté par la joueuse qui en gagne au moins 3. On convient que les sets sont tous joués, même lorsque l'issue est déjà connue.

- 7.1** Dans le format à 3 sets, on note X le nombre de sets gagnés par Ana. Préciser la loi de X , puis démontrer que la probabilité qu'Ana remporte le match vaut 0,648.
- 7.2** Dans le format à 5 sets, on note Y le nombre de sets gagnés par Ana. Calculer la probabilité qu'Ana remporte le match (arrondi à 10^{-4}).
- 7.3** Quel format avantage la meilleure joueuse ? Justifier. Formuler une conjecture sur l'effet d'un allongement du match, puis la vérifier en calculant la probabilité qu'Ana l'emporte dans un format à 7 sets (au moins 4 sets gagnés). Que se passerait-il si les deux joueuses étaient de force égale ($p = 0,5$) ?

Exercice 8 Valider un modèle



Une classe réalise 200 fois l'expérience suivante : lancer simultanément quatre pièces et compter le nombre de Piles obtenus. Les effectifs observés sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Nombre de Piles k	0	1	2	3	4
Effectif observé	11	52	74	51	12

- 8.1** On suppose les quatre pièces équilibrées et les lancers indépendants. Quelle loi le nombre X de Piles suit-il ? Calculer $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 4, sous forme de fractions.
- 8.2** En déduire les effectifs théoriques attendus sur 200 expériences, puis comparer au tableau. Le modèle vous paraît-il acceptable ?
- 8.3** Une seconde classe, utilisant quatre pièces identiques mais peut-être truquées, obtient sur 200 expériences les effectifs 6, 29, 70, 69 et 26. Calculer la moyenne du nombre de Piles observé et en déduire, à l'aide de $E(X) = 4p$, une estimation de la probabilité p d'obtenir Pile avec l'une de ces pièces.
- 8.4** Calculer les effectifs théoriques associés à cette valeur de p (arrondis à l'unité) et conclure.