

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 15



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B

Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Vrai ou faux, démonstration de $P(X = k)$, surréservation aérienne, valeur la plus probable et intervalle

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un calcul ou un contre-exemple explicite. Toute modélisation par une loi binomiale sera justifiée (épreuve répétée, succès et sa probabilité, nombre de répétitions, indépendance). Les probabilités obtenues à la calculatrice seront arrondies à 10^{-4} , sauf mention contraire, et l'on indiquera le calcul effectué.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chacune des quatre affirmations, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 **Affirmation** : « si X suit la loi $\mathcal{B}(30; 0,5)$, alors $P(X \leq 14) = P(X \geq 16)$ ».
- 1.2 **Affirmation** : « une urne contient 10 boules dont 4 rouges; on tire successivement et sans remise 5 boules et l'on note X le nombre de boules rouges obtenues : alors X suit la loi $\mathcal{B}(5; 0,4)$ ».
- 1.3 **Affirmation** : « il existe une loi binomiale d'espérance 6 et de variance 8 ».
- 1.4 **Affirmation** : « si X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$ avec $0 < p < 1$, alors $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$ ».

Exercice 2 La formule $P(X = k)$

5 pts ●●●

On répète 4 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p ($0 < p < 1$); l'échec est noté $\bar{S}$. On note X le nombre de succès obtenus. La figure 1 représente les deux premiers niveaux de l'arbre associé.

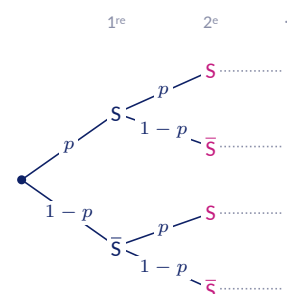


Figure 1 — Les deux premières épreuves

- 2.1 Combien l'arbre complet comporte-t-il de chemins ? Justifier.
- 2.2 Le chemin $S\bar{S}S\bar{S}$ et le chemin $\bar{S}SS\bar{S}$ ont-ils la même probabilité ? Démontrer que tout chemin comportant exactement 2 succès a pour probabilité $p^2(1-p)^2$.
- 2.3 Justifier qu'un chemin comportant exactement 2 succès est entièrement déterminé par le choix des 2 rangs auxquels le succès se produit. En déduire le nombre de tels chemins, puis que $P(X = 2) = 6p^2(1-p)^2$.
- 2.4 Reprendre le raisonnement dans le cas général : démontrer que, pour un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- 2.5 Application : pour $p = 0,3$ et $n = 4$, calculer $P(X = 2)$ et $P(X \geq 1)$ (valeurs exactes).

Exercice 3 La surréservation

6 pts ●●●○

Un avion dispose de 200 places. Une compagnie aérienne constate que chaque passager ayant réservé se présente à l'embarquement avec la probabilité 0,93, indépendamment des autres passagers. Pour limiter les places vides, elle vend n billets pour ce vol, avec $n \geq 200$; on note X_n le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

```
1 def maxi():
2     n = 200
3     while 1 - proba(n) <= 0.05:
4         n = ...
5     return n - 1
```

- 3.1 Préciser la loi de X_n , en justifiant.
- 3.2 La compagnie vend 210 billets. Calculer $E(X_{210})$ et $\sigma(X_{210})$ (arrondi à 10^{-2}), puis interpréter $E(X_{210})$.
- 3.3 Un passager est refusé lorsque plus de 200 passagers se présentent. Justifier que la probabilité qu'au moins un passager soit refusé vaut $1 - P(X_{210} \leq 200)$, puis la calculer.
- 3.4 La compagnie veut que cette probabilité reste inférieure ou égale à 0,05. En testant plusieurs valeurs de n à la calculatrice, déterminer le nombre maximal de billets vendables. (On donne $1 - P(X_{208} \leq 200) \approx 0,0198$.)
- 3.5 Compléter la ligne 4 de la fonction ci-contre, qui renvoie ce nombre maximal; proba(n) renvoie $P(Y \leq 200)$ pour Y de loi $\mathcal{B}(n; 0,93)$.
- 3.6 La compagnie choisit finalement une surréservation plus prudente et ne vend que 205 billets. Calculer la probabilité qu'au moins un passager soit refusé et comparer au résultat de la question 3.3. Estimer, à l'aide de $E(X_{205})$, le nombre moyen de places vides.

Exercice 4 La valeur la plus probable

5 pts ●●●○

Dans une population, 35 % des individus portent un certain marqueur génétique. Un laboratoire examine les prélèvements de 20 personnes choisies au hasard et indépendamment les unes des autres; on note X le nombre de personnes porteuses du marqueur parmi elles.

- 4.1 Préciser la loi de X , puis calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 4.2 Calculer $P(X = 6)$, $P(X = 7)$ et $P(X = 8)$. Quelle est, parmi ces trois valeurs, celle de k la plus probable ?
- 4.3 En calculant quelques probabilités supplémentaires, déterminer la valeur de k pour laquelle $P(X = k)$ est maximale et la comparer à $E(X)$.
- 4.4 Calculer $P(5 \leq X \leq 9)$ et $P(4 \leq X \leq 10)$.
- 4.5 En déduire le plus petit entier h tel que $P(7 - h \leq X \leq 7 + h) \geq 0,9$, puis l'intervalle I correspondant. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- 4.6 Le laboratoire examine finalement 100 prélèvements. Sans calculer de probabilité, indiquer l'espérance et l'écart type du nombre de personnes porteuses du marqueur (arrondi à 10^{-2}).