

Approfondissement

Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Pour aller plus loin : symétrie et somme des probabilités, mode, planche de Galton, temps d'attente, estimation de p

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Symétrie et somme des probabilités

●●●

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, avec $n \geq 1$ et $0 < p < 1$. On pose $Y = n - X$.

- 1.1 Justifier que Y , nombre d'échecs, compte les succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et $1 - p$, puis démontrer par le calcul que $P(Y = k) = \binom{n}{k} (1 - p)^k p^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$. Quelle est la loi de Y ?
- 1.2 En déduire que $P(X \leq k) = P(Y \geq n - k)$. Application : X suit $\mathcal{B}(25; 0,8)$ et l'on ne dispose que d'une table de $\mathcal{B}(25; 0,2)$; comment obtenir $P(X \leq 18)$?
- 1.3 Démontrer que, pour $p = 0,5$, la loi de X est symétrique : $P(X = k) = P(X = n - k)$; en déduire, pour n impair, la valeur de $P(X \leq \frac{n-1}{2})$.
- 1.4 On admet la *formule du binôme de Newton (hors programme)* : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$; en déduire que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$.

Exercice 2 La valeur la plus probable

●●●

La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$ avec $0 < p < 1$. Pour $0 \leq k \leq n - 1$, on pose $r_k = \frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)}$.

- 2.1 Démontrer que $r_k = \frac{n - k}{k + 1} \times \frac{p}{1 - p}$. En déduire que la suite (r_k) est strictement décroissante.
- 2.2 Démontrer que $r_k \geq 1$ équivaut à $k \leq (n + 1)p - 1$, puis que, si $(n + 1)p$ n'est pas entier et $m = \lfloor (n + 1)p \rfloor$ (partie entière), $P(X = k)$ croît de $k = 0$ à $k = m$ puis décroît de $k = m$ à $k = n$: le maximum est atteint en $k = m$.
- 2.3 Application : X suit $\mathcal{B}(25; 0,3)$. Déterminer la valeur de k la plus probable, vérifier en comparant $P(X = 6)$, $P(X = 7)$, $P(X = 8)$, et comparer à $E(X)$. Que se passe-t-il si $(n + 1)p$ est entier ? Traiter l'exemple $n = 9, p = 0,5$.

Exercice 3 La planche de Galton

●●●

Sur la planche de la figure 1, une bille tombe sur le clou du sommet puis rebondit 6 fois : à chaque rebond elle part à gauche ou à droite avec la probabilité 0,5, indépendamment des autres rebonds. Elle termine dans l'une des sept cases numérotées de 0 à 6 ; on note X le numéro de la case atteinte.

- 3.1 Justifier que X est aussi le nombre de fois où la bille part à droite, puis préciser la loi de X .
- 3.2 Calculer $P(X = k)$ pour $0 \leq k \leq 6$, sous forme de fractions de dénominateur 64. Quel lien avec la ligne $n = 6$ du triangle de Pascal ?
- 3.3 Le chemin tracé mène-t-il à la case 4 ? Combien de chemins y mènent, et quelle est la probabilité de chacun ?
- 3.4 Calculer $E(X)$, $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}) et la probabilité que la bille termine dans l'une des trois cases centrales. On lâche enfin 640 billes : donner les effectifs théoriques des sept cases.

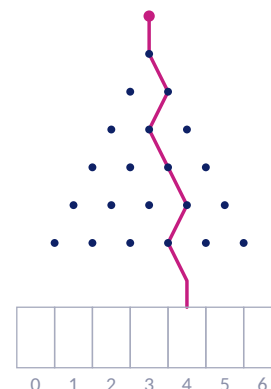


Figure 1 — Planche à 6 rangées de clous

Exercice 4 Le temps d'attente du premier succès (hors programme — pour aller plus loin)

On répète indéfiniment, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, et on note T le rang du premier succès.

- 4.1** Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $P(T = k) = (1 - p)^{k-1}p$, puis que $P(T > k) = (1 - p)^k$.
- 4.2** On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. Calculer $P(T = 3)$ (fraction irréductible), $P(T \leq 10)$ (arrondi à 10^{-4}) et le plus petit entier k tel que $P(T \leq k) \geq 0,99$.
- 4.3** On admet que T possède une espérance. En distinguant selon le résultat de la première épreuve, justifier l'égalité $E(T) = 1 + (1 - p)E(T)$, puis en déduire $E(T) = \frac{1}{p}$. Application au dé.
- 4.4** Recopier et compléter la ligne 5 du programme ci-contre, qui simule T et estime son espérance sur N simulations. Quel résultat doit-on attendre pour moyenne(100000, 1/6) ?

```

1  from random import random
2
3  def attente(p):
4      k = 1
5      while ... :
6          k = k + 1
7      return k
8
9  def moyenne(N, p):
10     s = 0
11     for i in range(N):
12         s = s + attente(p)
13     return s / N

```

Exercice 5 Estimer la proportion p 

Un biologiste observe $n = 50$ insectes capturés indépendamment et en compte $k = 13$ porteurs d'une mutation. Il cherche la valeur de p qui rend l'observation la plus vraisemblable : pour $p \in]0 ; 1[$, il pose $L(p) = \binom{50}{13} p^{13} (1 - p)^{37}$, probabilité d'observer exactement 13 insectes mutants sur 50 lorsque la proportion vaut p .

- 5.1** Démontrer que, pour tout $p \in]0 ; 1[$, $L'(p) = \binom{50}{13} p^{12} (1 - p)^{36} (13 - 50p)$.
- 5.2** En déduire le tableau de variations de L sur $]0 ; 1[$, puis la valeur de p qui maximise L .
- 5.3** Reprendre la question précédente dans le cas général (n insectes, k mutants, $1 \leq k \leq n - 1$) : démontrer que L est maximale pour $p = k/n$ et commenter.
- 5.4** Avec $p = 0,26$, calculer $P(X = 13)$ et $P(10 \leq X \leq 16)$ pour X de loi $\mathcal{B}(50; p)$ (arrondis à 10^{-4}).

Exercice 6 Le problème de Newton et Pepys

En 1693, Samuel Pepys demande à Isaac Newton lequel des trois événements suivants est le plus probable, tous les dés étant équilibrés et les lancers indépendants :

- A : obtenir *au moins un* 6 en lançant 6 dés ;
- B : obtenir *au moins deux* 6 en lançant 12 dés ;
- C : obtenir *au moins trois* 6 en lançant 18 dés.

- 6.1** Pepys pensait que les trois événements étaient équiprobables, chacun demandant « un 6 pour six dés ». Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ (arrondis à 10^{-4}) et conclure.
- 6.2** Justifier que, dans chacune des trois expériences, le nombre moyen de 6 obtenus est exactement égal au nombre de 6 exigés. Pourquoi ce constat ne contredit-il pas le résultat précédent ?
- 6.3** On note X_m le nombre de 6 obtenus en lançant $6m$ dés et $p_m = P(X_m \geq m)$. Calculer p_4 et p_5 (arrondis à 10^{-4}) et conjecturer le comportement de (p_m) .