

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 16



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac

Sommes de variables aléatoires

QCM — Le conditionnement du café : masse d'un carton, paquets non conformes, contrôle sur un échantillon

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (5 points et 7 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toutes les variables aléatoires présentées comme indépendantes le sont : il n'y a pas lieu de le justifier, mais on indiquera chaque fois que l'additivité de la variance est utilisée. Les probabilités obtenues à la calculatrice seront accompagnées du calcul qui les produit et arrondies à 10^{-4} , sauf mention contraire.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et vérifient $V(X) = 3$ et $V(Y) = 5$. Alors $V(2X + Y)$ est égal à :
- a) 11 b) 17 c) 22 d) 32
- 1.2** $(X_1, \dots, X_{25})$ est un échantillon de taille 25 d'une loi d'espérance 10 et d'écart type 4, et M_{25} en est la variable moyenne. Alors $\sigma(M_{25})$ est égal à :
- a) 0,16 b) 0,8 c) 4 d) 20
- 1.3** La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ telle que $E(X) = 12$ et $\sigma(X) = 3$. Alors n est égal à :
- a) 16 b) 24 c) 36 d) 48
- 1.4** Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, de même loi et d'écart type 2. Alors $\sigma(X + Y)$ est égal à :
- a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) 4 d) 8
- 1.5** La variable aléatoire X vérifie $E(X) = 5$ et l'on pose $Y = 40 - 3X$. Alors $E(Y)$ est égal à :
- a) 15 b) 25 c) 35 d) 55

Exercice 2 Le conditionnement du café

7 pts ●●○

Une entreprise conditionne du café moulu en paquets. Une doseuse verse dans chaque paquet une masse de café, exprimée en grammes, modélisée par une variable aléatoire C d'espérance $E(C) = 252$ et d'écart type $\sigma(C) = 2$; les masses versées dans des paquets différents sont indépendantes et suivent toutes cette même loi. L'emballage d'un paquet a une masse constante de 12 g. *Les trois parties sont indépendantes les unes des autres.*

Partie A — La masse d'un carton

On note $M = C + 12$ la masse totale d'un paquet. Un carton contient 25 paquets, dont les masses $M_1, \dots, M_{25}$ sont indépendantes et de même loi que M ; le carton vide a une masse constante de 300 g. La masse totale d'un carton plein est donc $T = M_1 + M_2 + \dots + M_{25} + 300$.

- 2.1** Calculer $E(M)$ et $\sigma(M)$.
- 2.2** Démontrer que $E(T) = 6\,900$ g, puis calculer $V(T)$ et $\sigma(T)$.
- 2.3** Un élève propose d'écrire $T = 25M + 300$. Calculer $\sigma(25M + 300)$ et expliquer, en une ou deux phrases, pourquoi cette écriture ne convient pas.
- 2.4** L'expédition d'un carton est facturée 0,002 € par gramme, plus 1,50 € de frais fixes. On note F le prix, en euros, de l'expédition d'un carton. Exprimer F en fonction de T , puis calculer $E(F)$ et $\sigma(F)$.
- 2.5** Une palette reçoit 40 cartons pleins, indépendants et de même loi. Calculer l'espérance et l'écart type de la masse totale de la palette (arrondi à 10^{-2}).

Partie B — Les paquets non conformes

Un paquet est déclaré *non conforme* lorsque la masse de café qu'il contient est inférieure à 248 g ; on admet que cet événement a la probabilité 0,04, indépendamment d'un paquet à l'autre. On note N le nombre de paquets non conformes d'un carton de 25 paquets ; la figure 1 représente la loi de N .

- 2.6** Justifier que N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25; 0,04)$.
- 2.7** En écrivant N comme une somme de 25 variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, démontrer que $E(N) = 1$ et $V(N) = 0,96$. Donner $\sigma(N)$ arrondi à 10^{-3} et interpréter $E(N)$.
- 2.8** Calculer la probabilité qu'un carton ne contienne aucun paquet non conforme, puis celle qu'il en contienne au moins deux. Vérifier la cohérence de la première valeur avec la figure 1.
- 2.9** Le retraitement d'un paquet non conforme coûte 0,80 €. On note $K = 0,8N$ le coût, en euros, des paquets non conformes d'un carton. Calculer $E(K)$ et $\sigma(K)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 2.10** L'entreprise expédie 200 cartons. Combien peut-elle s'attendre à en voir contenir au moins deux paquets non conformes ? On arrondira à l'unité.

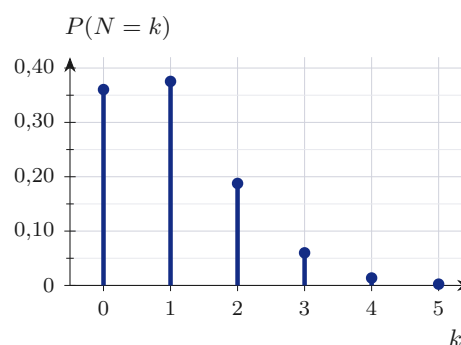


Figure 1 — La loi de N

Partie C — Un contrôle sur un échantillon

Le service qualité prélève au hasard n paquets dans la production et mesure la masse de café de chacun : $(C_1, \dots, C_n)$ est un échantillon de taille n de la loi de C . On pose $S_n = C_1 + \dots + C_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$, masse moyenne de café des n paquets prélevés.

- 2.11** Pour $n = 100$, calculer $E(S_{100})$ et $\sigma(S_{100})$, puis $E(M_{100})$ et $\sigma(M_{100})$.
- 2.12** Déterminer le plus petit entier n pour lequel $\sigma(M_n) \leq 0,1$.
- 2.13** Expliquer en une ou deux phrases pourquoi $\sigma(M_n)$ diminue quand n augmente alors que $\sigma(S_n)$ augmente.
- 2.14** Lors d'un contrôle portant sur 100 paquets, le service qualité observe une masse moyenne de café de 250,4 g. Exprimer l'écart entre cette valeur et 252 en nombre d'écarts types $\sigma(M_{100})$. Ce résultat vous paraît-il compatible avec le réglage annoncé de la doseuse ? Justifier en une ou deux phrases.
- 2.15** L'entreprise installe une doseuse plus précise, pour laquelle $\sigma(C) = 1,5$, l'espérance restant égale à 252. Calculer le nouvel écart type $\sigma(M_{100})$ et déterminer la taille d'échantillon qui donnerait alors $\sigma(M_n) = 0,05$.