

Fiche de cours

Sommes de variables aléatoires

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 RAPPELS : ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

Définition. Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_r$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_r$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i, \quad V(X) = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque. $E(X)$ est la valeur moyenne de X sur un grand nombre de répétitions ; $\sigma(X)$ mesure la dispersion autour de $E(X)$, dans la même unité que X .

2 SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES

Définition. Si X et Y sont définies sur le même univers, $X + Y$ est la variable aléatoire qui, à chaque issue ω , associe $X(\omega) + Y(\omega)$.

Méthode — déterminer la loi de $X + Y$. Croiser les valeurs de X et de Y dans un tableau à double entrée, calculer la probabilité de chaque case, puis regrouper les cases donnant la même somme.

Propriété — linéarité de l'espérance — toujours vraie. Pour toutes variables X et Y sur le même univers et tous réels a et b :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y), \quad E(aX) = a E(X), \quad E(aX + b) = a E(X) + b.$$

Plus généralement, $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ pour toutes variables $X_1, \dots, X_n$ sur le même univers.

3 VARIANCE D'UNE SOMME

Propriété. Pour tous réels a et b : $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$. Ajouter une constante ne change pas la dispersion.

Théorème — variables indépendantes. Si X et Y sont **indépendantes** — par exemple si elles sont associées à deux épreuves d'une succession d'épreuves indépendantes — alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y), \quad \sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)}.$$

Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes (associées aux n épreuves d'une succession d'épreuves indépendantes), $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.

Remarque. La variance n'est donc *pas* linéaire : $V(aX) = a^2 V(X)$, et l'additivité exige l'indépendance, contrairement à celle de l'espérance.

4 APPLICATION À LA LOI BINOMIALE

Théorème. Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, alors $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Méthode — démonstration exigible. On écrit $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, où X_i vaut 1 si la i -ième épreuve est un succès et 0 sinon : les X_i sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p , donc $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1 - p)$. La linéarité de l'espérance donne $E(X) = np$, et l'additivité de la variance (indépendance) donne $V(X) = np(1 - p)$.

Méthode — décomposer une variable. Lorsqu'une variable *compte* un nombre de réalisations, l'écrire $X = X_1 + \dots + X_n$ où X_i vaut 1 si la i -ième réalisation a lieu et 0 sinon : $E(X)$ s'obtient alors par linéarité, et $V(X)$ par additivité lorsque les X_i sont indépendantes.

5 ÉCHANTILLON, SOMME ET MOYENNE

Définition. Un **échantillon de taille n** d'une loi de probabilité est une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires **indépendantes** suivant toutes cette loi. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la **somme** et $M_n = \frac{S_n}{n}$ la **moyenne** de l'échantillon.

Propriété. Si la loi commune a pour espérance μ , pour variance V et pour écart type σ :

$$E(S_n) = n\mu, \quad V(S_n) = nV, \quad \sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}; \quad E(M_n) = \mu, \quad V(M_n) = \frac{V}{n}, \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Remarque. La moyenne M_n a la même espérance que la loi initiale, mais une dispersion $\sigma/\sqrt{n}$: elle est d'autant plus **concentrée** autour de μ que n est grand. Pour diviser l'écart type de M_n par 2, il faut multiplier n par 4.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Déterminer la loi de $X + Y$ par un tableau à double entrée, puis calculer son espérance de deux façons.
- Utiliser la linéarité de l'espérance et les formules $V(aX + b) = a^2V(X)$, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ pour des variables indépendantes.
- Décomposer une variable aléatoire en somme de variables simples (souvent des variables de Bernoulli) pour calculer son espérance et sa variance.
- Retrouver $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$ pour une loi binomiale.
- Calculer $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(M_n)$, $\sigma(M_n)$ pour un échantillon, et interpréter la décroissance en $1/\sqrt{n}$.
- Calculer l'espérance et l'écart type d'une combinaison $aX + bY$ de deux variables indépendantes.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — loi d'une somme

X prend les valeurs 1 et 2, Y les valeurs 1, 2 et 3, toutes équiprobables et indépendamment l'une de l'autre : chacune des 6 cases a pour probabilité $\frac{1}{6}$. En regroupant les sommes : $P(X + Y = 2) = \frac{1}{6}$, $P(X + Y = 3) = \frac{2}{6}$, $P(X + Y = 4) = \frac{2}{6}$, $P(X + Y = 5) = \frac{1}{6}$. On retrouve $E(X + Y) = \frac{21}{6} = 3,5 = 1,5 + 2 = E(X) + E(Y)$.

★ EXEMPLE — gains d'un jeu répété

Le gain X d'une partie vaut -1 € avec la probabilité 0,7 et 3 € avec la probabilité 0,3 : $E(X) = -0,7 + 0,9 = 0,2$ et $V(X) = (0,7 \times 1 + 0,3 \times 9) - 0,2^2 = 3,36$. Pour 20 parties indépendantes, de gains $X_1, \dots, X_{20}$, le gain total $S = X_1 + \dots + X_{20}$ vérifie $E(S) = 20 \times 0,2 = 4$ €, $V(S) = 20 \times 3,36 = 67,2$ et $\sigma(S) \approx 8,20$ €.

★ EXEMPLE — moyenne d'un échantillon

Pour un dé équilibré à six faces, $\mu = 3,5$, $V = \frac{35}{12} \approx 2,92$ et $\sigma \approx 1,71$. Pour un échantillon de taille $n = 100$: $E(M_{100}) = 3,5$ et $\sigma(M_{100}) = \frac{\sigma}{10} \approx 0,171$: la moyenne de 100 lancers est dix fois moins dispersée qu'un lancer isolé.

★ EXEMPLE — combinaison de deux variables

Une entreprise vend deux produits en quantités X et Y indépendantes, avec $E(X) = 120$, $V(X) = 36$, $E(Y) = 80$ et $V(Y) = 64$. La recette est $R = 5X + 8Y$ (en euros). Alors $E(R) = 5 \times 120 + 8 \times 80 = 1\,240$ € et $V(R) = 5^2 \times 36 + 8^2 \times 64 = 900 + 4\,096 = 4\,996$, d'où $\sigma(R) \approx 70,7$ €.

✖ PIÈGES

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ est toujours vraie, mais $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ exige l'**indépendance**.
- $V(aX) = a^2V(X)$ et non $aV(X)$; $V(X + b) = V(X)$: ajouter une constante ne change pas la variance.
- $\sigma(X + Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$ en général : pour des variables indépendantes, on additionne les variances, pas les écarts types.
- $E(M_n) = \mu$ ne dépend pas de n : c'est la *dispersion* qui diminue, en $\sigma/\sqrt{n}$ et non en σ/n .
- $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$ augmente avec n , alors que $\sigma(M_n)$ diminue : ne pas confondre somme et moyenne.
- Dans un échantillon, les X_i suivent toutes la même loi : $E(X_i) = \mu$ pour chaque i , et non $E(X_i) = \mu/n$.