

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 16

Exercices 2

 Sommes de variables aléatoires

Problèmes : colis et conditionnement, loi d'une somme, échantillons et précision, simulation en Python, décomposition, choix d'une stratégie

8 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser une grandeur par une somme de variables aléatoires, puis calculer son espérance et son écart type sans déterminer sa loi.
- Déterminer la loi d'une somme, la représenter, et comparer $\sigma(aX)$ à $\sigma(X_1 + \dots + X_a)$.
- Exploiter un échantillon : précision d'une moyenne, taille d'échantillon, simulation en Python et lecture d'un nuage de moyennes.

Exercice 1 Le colis de la librairie

●●○

Une librairie expédie des colis de 4 livres d'un même titre. La masse, en grammes, d'un livre a pour espérance 450 et pour écart type 20; les masses L_1, L_2, L_3, L_4 des livres d'un colis sont indépendantes et de même loi. Le carton pèse 180 g, de sorte que la masse totale du colis est $M = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + 180$.

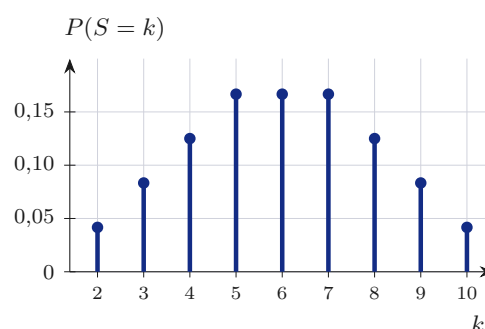
- 1.1 Calculer $E(M)$, $V(M)$ et $\sigma(M)$.
- 1.2 Un stagiaire propose d'écrire $M = 4L_1 + 180$. Calculer $E(4L_1 + 180)$ et $\sigma(4L_1 + 180)$, puis expliquer en une phrase pourquoi cette modélisation est fautive.
- 1.3 Le transporteur facture 0,004 € par gramme plus 2 € de frais fixes : exprimer le prix C d'un colis en fonction de M , puis calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$.
- 1.4 La librairie expédie 2500 colis par mois, indépendamment les uns des autres. Calculer l'espérance et l'écart type du coût total mensuel d'expédition.

Exercice 2 Un jeu à deux dés différents

●●○

Un jeu de société utilise un dé tétraédrique équilibré, dont les faces portent les numéros 1 à 4, et un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6. À chaque tour, le joueur lance les deux dés, de façon indépendante, et avance du nombre de cases égal à la somme des deux numéros. On note T le numéro du tétraèdre, D celui du cube et $S = T + D$.

- 2.1 Justifier que l'expérience a 24 issues équiprobables. Dresser le tableau à double entrée des valeurs de S .
- 2.2 En déduire la loi de S (probabilités de dénominateur 24), vérifier qu'elle correspond à la figure 1 et donner les valeurs les plus probables.
- 2.3 Calculer $E(T)$, $E(D)$ et en déduire $E(S)$. Retrouver $E(S)$ à partir de la loi de S .
- 2.4 On donne $V(T) = \frac{5}{4}$ et $V(D) = \frac{35}{12}$. Calculer $V(S)$ puis $\sigma(S)$ arrondi à 10^{-3} .
- 2.5 Calculer $P(S \geq 8)$ et $P(S = 6)$ sous forme de fractions irréductibles.

Figure 1 — La loi de $S = T + D$

Exercice 3 Le réglage d'une embouteilleuse



Une machine remplit des bouteilles d'eau. Le volume, en millilitres, versé dans une bouteille a pour espérance $\mu = 1000$ et pour écart type $\sigma = 5$; les volumes de bouteilles différentes sont indépendants et de même loi. Un opérateur prélève n bouteilles au hasard dans la production et note S_n le volume total prélevé et $M_n = \frac{S_n}{n}$ le volume moyen.

- 3.1 Les bouteilles sont vendues par cartons de 9. Calculer l'espérance et l'écart type du volume total d'un carton.
- 3.2 Calculer $E(M_{25})$ et $\sigma(M_{25})$, puis $\sigma(M_{100})$.
- 3.3 L'opérateur veut que l'écart type du volume moyen de son prélèvement soit inférieur ou égal à 0,25 mL. Déterminer le nombre minimal de bouteilles à prélever.
- 3.4 Expliquer en deux phrases pourquoi la moyenne d'un grand échantillon renseigne mieux sur le réglage que le volume d'une seule bouteille.
- 3.5 Sur un prélèvement de 100 bouteilles, l'opérateur observe une moyenne de 998,2 mL. Exprimer l'écart entre cette valeur et 1000 en nombre d'écarts types $\sigma(M_{100})$. Que peut-on en penser ?

Exercice 4 Simuler la moyenne d'un échantillon



On lance un dé équilibré à six faces; le numéro obtenu a pour espérance $\mu = 3,5$ et pour écart type $\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1,708$. Le programme ci-contre simule N échantillons de taille n de cette loi et renvoie la liste de leurs moyennes. La figure 2 représente les moyennes de 30 échantillons pour $n = 10$, puis $n = 40$, puis $n = 160$.

- 4.1 Que renvoie l'appel `echantillon(5)` ? Recopier et compléter la ligne 10 pour que `moyennes(N, n)` renvoie bien la liste des moyennes des N échantillons simulés.
- 4.2 Calculer $\sigma(M_n)$ pour $n = 10$, $n = 40$ et $n = 160$ (arrondis à 10^{-3}).
- 4.3 Lire sur la figure 2 la plus petite et la plus grande des 30 moyennes pour chaque n , calculer l'amplitude des trois nuages et comparer ces amplitudes entre elles, puis aux écarts types de la question 4.2.
- 4.4 Les trois nuages semblent centrés autour d'une même valeur : laquelle, et pourquoi ?
- 4.5 Quelle taille d'échantillon faudrait-il choisir pour que l'amplitude du nuage soit encore divisée par 2 par rapport à celle obtenue pour $n = 160$?

```

1 from random import randint
2
3 def echantillon(n):
4     return [randint(1, 6) for i in range(n)]
5
6 def moyennes(N, n):
7     L = []
8     for j in range(N):
9         e = echantillon(n)
10        L.append(...)
11    return L

```

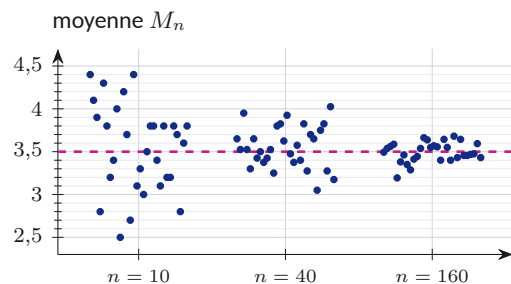


Figure 2 — Moyennes de 30 échantillons (la droite en pointillé a pour équation $y = 3,5$)

Exercice 5 Le parcours du basketteur



Lors d'un concours d'adresse, un joueur tire successivement depuis cinq positions numérotées de 1 à 5, de plus en plus éloignées du panier. Il réussit le tir depuis la position i avec la probabilité p_i , les cinq tirs étant indépendants :

Position i	1	2	3	4	5
p_i	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30

Pour $1 \leq i \leq 5$, X_i vaut 1 si le tir depuis la position i est réussi et 0 sinon. On note $X = X_1 + \dots + X_5$ le nombre de paniers marqués.

- 5.1 Expliquer pourquoi X ne suit pas une loi binomiale.
- 5.2 Calculer $E(X)$ puis $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}).

- 5.3** Les tirs des positions 1 à 4 rapportent 2 points, celui de la position 5 en rapporte 3 : le score est $G = 2(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 3X_5$. Calculer $E(G)$, $V(G)$ et $\sigma(G)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 5.4** Calculer la probabilité que le joueur réussisse les cinq tirs, puis celle qu'il n'en réussisse aucun (arrondis à 10^{-4}).
- 5.5** Le concours se déroule en 12 parcours identiques et indépendants. Donner l'espérance et l'écart type du score total (arrondi à 10^{-2}).

Exercice 6 Contrôle qualité et coût des rebuts



Une usine produit des connecteurs dont 5 % sont défectueux ; ils sont conditionnés en lots de 40 prélevés au hasard dans une production assez importante pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On note X le nombre de connecteurs défectueux d'un lot.

- 6.1** En écrivant X comme une somme de 40 variables de Bernoulli indépendantes, calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}). Quelle loi X suit-elle ?
- 6.2** Le traitement d'un lot coûte 12 € plus 3 € par connecteur défectueux, soit $C = 3X + 12$ euros. Calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 6.3** Un client commande 50 lots. On note T le nombre total de connecteurs défectueux reçus. Préciser la loi de T , puis calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 6.4** On note $M = T/50$ le nombre moyen de défectueux par lot : calculer $E(M)$ et $\sigma(M)$ (arrondi à 10^{-3}) et comparer $\sigma(M)$ à $\sigma(X)$.
- 6.5** Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 4)$ (arrondis à 10^{-4}).

Exercice 7 Trois façons de jouer neuf euros d'espérance



Une association propose trois jeux de hasard, dont les parties sont toutes indépendantes les unes des autres.

- **Jeu A** : une seule partie, qui rapporte 90 € avec la probabilité 0,1 et rien sinon ;
- **Jeu B** : 9 parties, chacune rapportant 10 € avec la probabilité 0,1 et rien sinon ;
- **Jeu C** : 90 parties, chacune rapportant 1 € avec la probabilité 0,1 et rien sinon.

On note G_A , G_B et G_C les gains totaux, en euros, procurés par chacun des trois jeux.

- 7.1** Calculer $E(G_A)$ et $\sigma(G_A)$.
- 7.2** En écrivant G_B comme une somme de variables aléatoires indépendantes de même loi, calculer $E(G_B)$, $V(G_B)$ et $\sigma(G_B)$. Procéder de même pour G_C (écart type arrondi à 10^{-3}).
- 7.3** Que constate-t-on pour les trois espérances ? Et pour les trois écarts types ?
- 7.4** Calculer la probabilité de ne rien gagner du tout pour chacun des trois jeux (arrondis à 10^{-4}).
- 7.5** Un joueur veut surtout *ne pas repartir les mains vides*, un autre *gagner au moins 50 €*. Conseiller chacun d'eux en justifiant.

Exercice 8 Un barème avec pénalité



Un concours comporte 30 questions, proposant chacune 4 réponses dont une seule est exacte ; toutes doivent être traitées. Une réponse exacte rapporte 3 points, une réponse fausse en retire 1. Un candidat répond au hasard, indépendamment d'une question à l'autre ; X est son nombre de bonnes réponses et N son score.

- 8.1** Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 8.2** Exprimer N en fonction de X seulement, puis calculer $E(N)$, $V(N)$ et $\sigma(N)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 8.3** Que signifie concrètement la valeur de $E(N)$ pour un candidat qui répond entièrement au hasard ?
- 8.4** On remplace la pénalité de 1 point par une pénalité de a points ($a > 0$). Exprimer le score N_a en fonction de X et de a , puis déterminer a pour que $E(N_a) = 0$.