

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 16



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Sommes de variables aléatoires

Vrai ou faux, démonstration de $E(X)$ et $V(X)$ pour la loi binomiale, gains cumulés, échantillon et algorithme

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un calcul ou un contre-exemple explicite. Toutes les variables aléatoires présentées comme indépendantes le sont : il n'y a pas lieu de le justifier, mais on précisera chaque fois que l'additivité de la variance est utilisée. Les valeurs exactes sont attendues lorsque c'est possible; les arrondis demandés seront indiqués. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●●○

Pour chacune des quatre affirmations, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même univers.

- 1.1 **Affirmation** : « pour toutes variables aléatoires X et Y , $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ».
- 1.2 **Affirmation** : « pour toutes variables aléatoires X et Y , $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ ».
- 1.3 **Affirmation** : « si X a pour écart type $\sigma(X) = 3$, alors $\sigma(2X - 5) = 6$ ».
- 1.4 **Affirmation** : « si $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de taille n d'une loi d'écart type σ et si $S_n = X_1 + \dots + X_n$, alors $\sigma(S_n) = n\sigma$ ».

Exercice 2 Espérance et variance de la loi binomiale

5 pts ●●●●○

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et p un réel de $]0; 1[$. On répète n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès a pour probabilité p , et on note X le nombre de succès obtenus : X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Pour $1 \leq i \leq n$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i -ième épreuve est un succès et 0 sinon.

- 2.1 Donner la loi de X_i sous forme de tableau, puis calculer $E(X_i)$ et démontrer que $V(X_i) = p(1 - p)$.
- 2.2 Justifier, en une ou deux phrases, l'égalité $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
- 2.3 En déduire $E(X)$, en précisant la propriété du cours utilisée.
- 2.4 En déduire $V(X)$ puis $\sigma(X)$, en précisant la propriété utilisée et l'hypothèse qui la rend applicable ici.
- 2.5 **Application**. Une machine produit des pièces dont 4 % sont défectueuses; on en prélève 150 au hasard dans une production assimilée à un tirage avec remise, et Y compte les pièces défectueuses. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
- 2.6 Une variable aléatoire Z suit une loi binomiale d'espérance 18 et d'écart type 3. Déterminer ses paramètres n et p .
- 2.7 Un élève affirme qu'il existe une loi binomiale d'espérance 5 et de variance 8. A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 3 Des gains cumulés

6 pts ●●●●

Une fête de village propose un jeu : à chaque partie, le joueur gagne 3 € avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et perd 1 € avec la probabilité $\frac{3}{4}$. Un joueur enchaîne 48 parties indépendantes; on note G_i le gain algébrique, en euros, de la i -ième partie, $S_n = G_1 + \dots + G_n$ le gain total sur n parties (figure 1) et $S = S_{48}$.

3.1 Donner la loi de G_1 dans un tableau, puis calculer $E(G_1)$ et $V(G_1)$. Comment qualifie-t-on un tel jeu ?

3.2 Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$, puis vérifier la cohérence avec la figure 1.

3.3 On note $M = \frac{S}{48}$ le gain moyen par partie. Calculer $E(M)$ et $\sigma(M)$, puis interpréter ces deux nombres en une phrase.

3.4 L'organisateur modifie la règle : le gain passe à 4 €, la perte et les probabilités restant inchangées. On note G'_i le nouveau gain d'une partie et S' le gain total sur 48 parties. Calculer $E(G'_1)$, $V(G'_1)$, puis $E(S')$ et $\sigma(S')$.

3.5 Avec cette nouvelle règle, déterminer le nombre minimal de parties à jouer pour que l'espérance du gain total atteigne 20 €.

3.6 Avec la règle initiale, un joueur ayant enchaîné les 48 parties a perdu 24 €. Exprimer l'écart entre ce résultat et $E(S)$ en nombre d'écarts types $\sigma(S)$, puis commenter en une phrase.

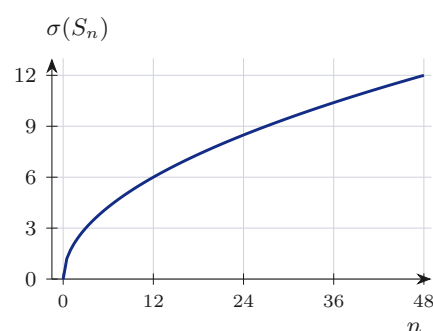


Figure 1 — Écart type du gain total sur n parties (règle initiale)

Exercice 4 Le remplissage des sachets

5 pts ●●●○

Une machine remplit des sachets de fruits secs. La masse, en grammes, d'un sachet a pour espérance $\mu = 250$ et pour écart type $\sigma = 6$; les masses de sachets différents sont indépendantes et de même loi. On prélève n sachets au hasard dans la production et on note S_n leur masse totale et $M_n = \frac{S_n}{n}$ leur masse moyenne.

4.1 Les sachets sont vendus par lots de 9. Calculer $E(S_9)$ et $\sigma(S_9)$.

4.2 Calculer $E(M_9)$ et $\sigma(M_9)$, puis $\sigma(M_{36})$.

4.3 Déterminer le plus petit entier n tel que $\sigma(M_n) \leq 0,5$.

4.4 La fonction Python ci-contre reçoit la liste des masses d'un prélèvement et doit renvoyer leur moyenne. Recopier et compléter les lignes 4 et 5.

4.5 Déterminer le nombre de sachets à prélever pour que l'écart type de la masse totale S_n soit égal à 60 g. Comparer alors $\sigma(S_n)$ et $\sigma(M_n)$, et expliquer pourquoi l'un croît quand l'autre décroît.

4.6 Sur un prélèvement de 36 sachets, on observe une masse moyenne de 247 g. Exprimer l'écart à 250 en nombre d'écarts types $\sigma(M_{36})$ et commenter en une phrase.

```
1 def moyenne(L):
2     s = 0
3     for m in L:
4         s = ...
5     return ...
```