

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 16



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement

Sommes de variables aléatoires

Pour aller plus loin : points fixes d'un tirage au sort, somme de deux lois binomiales, diversification d'un placement, records, marche aléatoire

5 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Les chapeaux du vestiaire

●●●

n personnes ($n \geq 2$) déposent leur chapeau au vestiaire. À la fin de la soirée, l'employé rend les n chapeaux au hasard, une personne recevant exactement un chapeau : toutes les distributions possibles sont équiprobables. Pour $1 \leq i \leq n$, on note X_i la variable qui vaut 1 si la personne i reçoit son propre chapeau et 0 sinon, et on pose $X = X_1 + \dots + X_n$, nombre de personnes qui récupèrent leur chapeau.

- 1.1** Justifier que $P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$, puis donner $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
- 1.2** En déduire $E(X)$. Commenter ce résultat, remarquable car il ne dépend pas de n .
- 1.3** On prend $n = 4$: il y a 24 distributions possibles. Le tableau ci-dessous les dénombre selon le nombre k de personnes servies correctement ; le vérifier pour $k = 3$ et $k = 4$.

k	0	1	2	3	4
Nombre de cas	9	8	6	0	1

- 1.4** Donner la loi de X pour $n = 4$, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$ à partir de cette loi.
- 1.5** Toujours pour $n = 4$, calculer $V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4)$ et comparer à $V(X)$. Démontrer ensuite que $P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) = \frac{1}{12}$, comparer ce nombre à $P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1)$ et conclure quant à l'additivité de la variance.

Exercice 2 La somme de deux lois binomiales

●●●

Soient n et m deux entiers naturels non nuls et $p \in]0 ; 1[$. Les variables X et Y sont indépendantes, X suivant la loi $\mathcal{B}(n ; p)$ et Y la loi $\mathcal{B}(m ; p)$.

- 2.1** Calculer $E(X + Y)$ et $V(X + Y)$ en fonction de n , m et p .
- 2.2** On considère une succession de $n + m$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p : X compte les succès des n premières et Y ceux des m dernières. En déduire la loi de $X + Y$, puis vérifier la cohérence avec la question précédente.
- 2.3 Application.** Deux ateliers fabriquent le même composant, avec la même probabilité 0,1 qu'un composant soit défectueux, indépendamment des autres. On prélève 30 composants dans le premier atelier et 20 dans le second. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 4 composants défectueux au total, puis au moins 8 (arrondis à 10^{-4}).
- 2.4** Les variables U et W sont indépendantes, U suivant $\mathcal{B}(2 ; 0,5)$ et W suivant $\mathcal{B}(2 ; 0,1)$. Calculer $E(U + W)$ et $V(U + W)$, puis démontrer que $U + W$ ne suit aucune loi binomiale.

Exercice 3 Diversifier un placement

●●●

Un épargnant dispose de deux placements indépendants. Le rendement annuel du placement A, en pourcentage, est une variable A telle que $E(A) = 4$ et $\sigma(A) = 6$; celui du placement B est une variable B telle que $E(B) = 4$ et $\sigma(B) = 8$. L'épargnant place une proportion t de son capital en A et $1 - t$ en B, avec $t \in [0 ; 1]$: le rendement de son portefeuille est $R = tA + (1 - t)B$.

- 3.1** Démontrer que $E(R) = 4$ pour toute valeur de t .
- 3.2** Démontrer que $V(R) = 36t^2 + 64(1 - t)^2$, puis développer et réduire cette expression.
- 3.3** Étudier les variations de la fonction $t \mapsto V(R)$ sur $[0; 1]$ et en déduire la valeur de t qui minimise le risque. Calculer alors $V(R)$ et $\sigma(R)$.
- 3.4** Comparer $\sigma(R)$ à $\sigma(A)$ et à $\sigma(B)$, puis commenter en une ou deux phrases l'intérêt de répartir son capital.
- 3.5** Reprendre la question 3.3 dans le cas général où $\sigma(A) = a$ et $\sigma(B) = b$ (avec $a > 0, b > 0$) : démontrer que le risque est minimal pour $t = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$.

Exercice 4 Compter les records



Une station météorologique dispose de n relevés de température, tous distincts, effectués les n années précédentes. On suppose que les $n!$ ordres possibles de ces relevés sont équiprobables. Le relevé de rang i est appelé *record* s'il est strictement supérieur à tous ceux qui le précèdent (le premier relevé est donc toujours un record). On note R_i la variable qui vaut 1 si le relevé de rang i est un record et 0 sinon, et $R = R_1 + \dots + R_n$ le nombre de records.

- 4.1** Justifier que $P(R_i = 1) = \frac{1}{i}$: parmi les i premiers relevés, chacun a la même probabilité d'être le plus grand.
- 4.2** En déduire que $E(R) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.
- 4.3** Calculer $E(R)$ pour $n = 10$, puis pour $n = 100$ (arrondis à 10^{-3}). Commenter la vitesse de croissance.
- 4.4** Recopier et compléter la ligne 5 du programme ci-contre, qui renvoie $E(R)$ pour une valeur de n donnée.
- 4.5** Un climatologue affirme : « sur 100 ans, on devrait observer une dizaine de records de chaleur, même sans réchauffement ». Que penser de cette affirmation ?

```

1 def esperance(n):
2     s = 0
3     i = 1
4     while i <= n:
5         s = ...
6         i = i + 1
7     return s

```

Exercice 5 Une marche aléatoire



Un jeton est placé en 0 sur un axe gradué. À chaque étape, il avance de +1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et de -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des étapes précédentes. On note X_k le déplacement de la k -ième étape et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la position du jeton après n étapes (figure 1).

- 5.1** Donner la loi de X_k , puis $E(X_k)$ et $V(X_k)$. En déduire $E(S_n)$, $V(S_n)$ et $\sigma(S_n)$.
- 5.2** On note D le nombre d'étapes où le jeton avance de +1. Préciser la loi de D et démontrer que $S_n = 2D - n$. Retrouver $E(S_n)$ et $V(S_n)$ à l'aide de D .
- 5.3** Pour $n = 100$, calculer $P(S_{100} = 0)$ et $P(-10 \leq S_{100} \leq 10)$ (arrondis à 10^{-4}).
- 5.4** Le jeton est maintenant biaisé : il avance de +1 avec la probabilité p et de -1 avec la probabilité $1 - p$. Démontrer que $E(S_n) = n(2p - 1)$ et $V(S_n) = 4np(1 - p)$. Application à $p = 0,55$ et $n = 100$ (écart type arrondi à 10^{-2}).

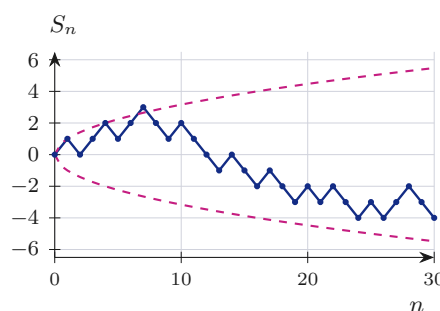


Figure 1 — Une marche simulée et les courbes $y = \pm\sqrt{n}$