

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 14



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Un cube repéré : droites, plans, intersections, distances et volumes — puis un QCM et un Vrai/Faux justifié

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute orthogonalité, tout parallélisme et toute appartenance doivent être établis par un calcul (produit scalaire, système, substitution dans une équation) ou par un théorème du cours clairement énoncé. Les longueurs, aires, volumes et distances seront donnés sous forme exacte.

Exercice 1 Un cube repéré

7 pts ●●○

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 (figure 1). L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{6}\overrightarrow{AE})$. Les parties A et B sont à traiter dans l'ordre ; les parties C et D sont indépendantes l'une de l'autre et n'utilisent que les résultats des parties A et B.

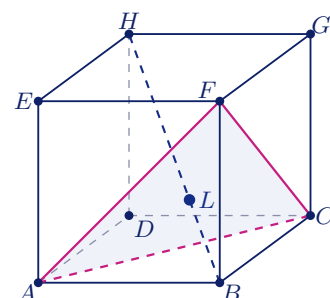


Figure 1 — Le cube, le plan (ACF) et la droite (BH)

Partie A — Droites et plans

- 1.1 Donner les coordonnées des sommets B, C, D, E, F, G et H .
- 1.2 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH) .
- 1.3 Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1; -1; -1)$ est un vecteur normal au plan (ACF) , puis en déduire que ce plan a pour équation cartésienne $x - y - z = 0$.
- 1.4 Démontrer que la droite (BH) est orthogonale au plan (ACF) .
- 1.5 Déterminer les coordonnées du point L d'intersection de la droite (BH) et du plan (ACF) .

Partie B — Distances, aires et volumes

- 1.6 Justifier que L est le projeté orthogonal du point B sur le plan (ACF) , puis calculer la distance du point B à ce plan.
- 1.7 Justifier que L est également le projeté orthogonal du point H sur le plan (ACF) , calculer la distance du point H à ce plan, puis vérifier que $BL + LH = BH$.
- 1.8 Démontrer que le triangle ACF est équilatéral et calculer son aire exacte.
- 1.9 Calculer le volume du tétraèdre $BACF$ de deux façons différentes : d'abord en remarquant que les arêtes $[BA]$, $[BC]$ et $[BF]$ sont deux à deux orthogonales, puis à l'aide des questions 1.6 et 1.8.
- 1.10 En déduire le volume du tétraèdre $HACF$. Vérifier enfin que le cube se décompose en ce tétraèdre et quatre tétraèdres de même volume que $BACF$.

Partie C — Un point mobile sur la droite (BH)

Pour tout réel t , on note M_t le point de la droite (BH) de coordonnées $(6 - t; t; t)$.

1.11 Démontrer que $CM_t^2 = 3t^2 - 12t + 36$.

1.12 Étudier les variations de ce trinôme du second degré et en déduire la valeur de t pour laquelle la longueur CM_t est minimale, ainsi que la valeur exacte de ce minimum.

1.13 Vérifier que le point obtenu est le point L , puis que $\overrightarrow{CL} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$. Qu'a-t-on ainsi démontré pour le point C et la droite (BH) ?

Partie D — Trois plans parallèles

1.14 Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{M}$ du segment $[BH]$. Quel point remarquable du cube appartient à $\mathcal{M}$?

1.15 Démontrer que le plan (DEG) a pour équation cartésienne $x - y - z + 6 = 0$, puis que les plans (ACF) , $\mathcal{M}$ et (DEG) sont deux à deux parallèles.

1.16 Calculer la distance qui sépare (ACF) de $\mathcal{M}$, puis celle qui sépare $\mathcal{M}$ de (DEG) . Que constate-t-on ?

Exercice 2 QCM et Vrai/Faux

5 pts ●●○

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Partie 1 — Questionnaire à choix multiples (3 points)

Pour chacune des trois questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

2.1 Une représentation paramétrique de la droite (AB) , où $A(3; -1; 2)$ et $B(1; 3; 0)$, est :

- | | | | |
|--|---|---|--|
| a) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ | b) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ | c) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ | d) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$ |
|--|---|---|--|

2.2 Le projeté orthogonal de l'origine O sur le plan d'équation $x - 2y + 2z + 9 = 0$ est le point de coordonnées :

- a) $(1; -2; 2)$ b) $(-1; 2; -2)$ c) $(-3; 6; -6)$ d) $(-9; 18; -18)$

2.3 Les plans d'équations $2x - y + 3z - 1 = 0$ et $-4x + 2y - 6z + 5 = 0$ sont :

- a) sécants b) confondus
c) strictement parallèles d) perpendiculaires

Partie 2 — Vrai ou faux ? (2 points)

Pour chacune des deux affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse **en justifiant** : une démonstration si l'affirmation est vraie, un contre-exemple explicite ou un calcul si elle est fausse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

2.4 Affirmation 1. La droite de représentation paramétrique $x = 2 + 3t, y = 1 - t, z = 4 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$) est contenue dans le plan d'équation $x + y - z + 1 = 0$.

2.5 Affirmation 2. Les points $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; 1)$, $C(4; -4; -3)$ et $D(0; 4; 5)$ sont coplanaires sans être alignés.