

Fiche de cours

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

Dans toute la fiche, le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est supposé **orthonormé** dès qu'il est question de vecteur normal, de norme ou de distance.

1 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE

Théorème. La droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t \vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est une **représentation paramétrique** de d ; t est le **paramètre**.

Remarque. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques : on peut changer de point et remplacer $\vec{u}$ par n'importe quel vecteur colinéaire non nul.

Méthode — savoir-faire de base. (a) Pour la droite (AB) , prendre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. (b) Pour tester si $M_0 \in d$, chercher t à partir d'une équation où le coefficient de t n'est pas nul, et vérifier qu'il convient pour les deux autres. (c) Pour comparer deux représentations, vérifier que les vecteurs directeurs sont colinéaires et qu'un point de l'une appartient à l'autre.

2 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Théorème. Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c) \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$; il admet une **équation cartésienne**

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{où } d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

Démonstration : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, que l'on développe.

Théorème — réciproque. Si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble des points vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Méthode — déterminer une équation de plan. (a) *Point et vecteur normal :* écrire $ax + by + cz + d = 0$ puis calculer d avec les coordonnées du point. (b) *Trois points non alignés A, B, C :* chercher $\vec{n}(a; b; c)$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (système à deux équations : on fixe une composante), puis revenir au cas (a).

3 POSITIONS RELATIVES ET INTERSECTIONS

Méthode — droite et plan. Remplacer x, y, z par leur expression paramétrique dans l'équation du plan. L'équation en t obtenue a une solution (droite sécante au plan, intersection en un point), aucune solution (droite strictement parallèle) ou une infinité (droite contenue dans le plan). Critère direct : $d \parallel \mathcal{P} \iff \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Méthode — deux droites. Résoudre le système donné par les deux paramétrages, avec deux paramètres distincts t et s . Solution unique : droites sécantes; une infinité de solutions : droites confondues; aucune solution : droites strictement parallèles (vecteurs directeurs colinéaires) ou non coplanaires (vecteurs directeurs non colinéaires).

Méthode — deux plans. $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \iff \vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires (plans confondus si les équations sont proportionnelles). Sinon l'intersection est une droite : on résout le système de deux équations en posant l'une des inconnues égale au paramètre t .

Propriété — base de l'espace. Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une base $\iff$ ils ne sont pas coplanaires $\iff$ le système $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ n'admet que la solution $x = y = z = 0$.

4 PROJETÉ ORTHOGONAL ET DISTANCE

Méthode — projeté sur un plan. Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{n}$: on écrit la représentation paramétrique de cette droite, on la reporte dans l'équation de $\mathcal{P}$, on en tire t , puis H . Enfin $d(M, \mathcal{P}) = MH$.

Méthode — projeté sur une droite. Le projeté orthogonal H de M sur d (de vecteur directeur $\vec{u}$) est le point d'intersection de d et du plan passant par M et de vecteur normal $\vec{u}$; on peut aussi écrire $H(x_A + \alpha t; \dots)$ et résoudre $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$. Enfin $d(M, d) = MH$.

Remarque. Le point H étant connu, le symétrique de M par rapport à $\mathcal{P}$ (ou à d) est le point M' tel que H soit le milieu de $[MM']$.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

➤ SAVOIR-FAIRE

- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite ; reconnaître qu'un point lui appartient ; comparer deux représentations.
- Déterminer une équation cartésienne d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal, ou de trois points non alignés ; lire un vecteur normal sur une équation.
- Étudier les positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans, et déterminer leur intersection.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan, puis la distance correspondante.
- Décider si trois vecteurs forment une base de l'espace et décomposer un vecteur dans cette base.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — droite et appartenance

Pour $A(2; -1; 3)$ et $B(4; 0; 1)$, $\overrightarrow{AB}(2; 1; -2)$ et $(AB) : x = 2 + 2t, y = -1 + t, z = 3 - 2t$. Pour $C(0; -2; 5)$, $x = 0$ donne $t = -1$, et alors $y = -2, z = 5 : C \in (AB)$. Pour $D(6; 1; 0)$, $t = 2$ donne $z = -1 \neq 0 : D \notin (AB)$.

★ EXEMPLE — équation d'un plan

Plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3; -1; 2)$: son équation est $3x - y + 2z + d = 0$, et $A \in \mathcal{P}$ donne $3 - 2 - 2 + d = 0$, soit $d = 1$. Donc $\mathcal{P} : 3x - y + 2z + 1 = 0$.

★ EXEMPLE — intersection d'une droite et d'un plan

Soit $d : x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3 + 2t$ et $\mathcal{P} : 3x - y + 2z + 1 = 0$. En reportant : $3(1 + t) - (2 - t) + 2(3 + 2t) + 1 = 8t + 8 = 0$, d'où $t = -1$ et un unique point d'intersection $I(0; 3; 1)$.

★ EXEMPLE — projeté orthogonal et distance

Distance de $M(4; 1; 1)$ au plan $\mathcal{P} : 3x - y + 2z + 1 = 0$. La droite passant par M dirigée par $\vec{n}(3; -1; 2)$ est $x = 4 + 3t, y = 1 - t, z = 1 + 2t$. En reportant : $14t + 14 = 0$, donc $t = -1$ et $H(1; 2; -1)$. Alors $\overrightarrow{MH}(-3; 1; -2)$ et $d(M, \mathcal{P}) = MH = \sqrt{14} \approx 3,74$.

✖ PIÈGES

- Une représentation paramétrique n'est pas unique : deux systèmes différents peuvent décrire la même droite.
- Pour l'intersection de deux droites, utiliser deux paramètres distincts : avec un seul paramètre on obtient un système faux.
- Un point appartient à une droite seulement si la même valeur de t convient pour les trois coordonnées.
- Vecteur *directeur* pour une droite, *normal* pour un plan : dans $ax + by + cz + d = 0$, $(a; b; c)$ est normal au plan, il ne le dirige pas.
- Lire un vecteur normal sur une équation de plan, calculer une norme ou une distance : tout cela suppose le repère orthonormé.