

Exercices 1

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Les bases : représentation paramétrique d'une droite, équation cartésienne d'un plan, intersections, projetés et distances

9 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

repère orthonormé dans toute la feuille

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Déterminer et reconnaître une représentation paramétrique de droite ; tester l'appartenance d'un point ; changer de paramétrage.
- Déterminer une équation cartésienne de plan (point et vecteur normal, trois points) ; étudier les positions relatives et les intersections par un système ; calculer un projeté orthogonal et une distance ; reconnaître une base de l'espace.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Droite.** $M \in d \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$: la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ non nul admet la *représentation paramétrique* $x = x_A + \alpha t$, $y = y_A + \beta t$, $z = z_A + \gamma t$, $t \in \mathbb{R}$. Il y en a une infinité : deux d'entre elles représentent la même droite lorsque les vecteurs directeurs sont colinéaires et qu'un point de l'une appartient à l'autre.
- **Plan.** En repère orthonormé, le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ non nul est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$: il admet une *équation cartésienne* $ax + by + cz + d = 0$. Réciproquement, toute équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.
- **Intersections.** Droite et plan : on remplace x, y, z par leur expression dans l'équation du plan ; l'équation obtenue en t a une solution unique (sécants), aucune solution (parallèles, droite hors du plan) ou une infinité (droite contenue dans le plan). Deux droites, deux ou trois plans : on résout le système correspondant.
- **Projeté et distance.** Le projeté orthogonal H de M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M dirigée par $\vec{n}$; sur une droite d dirigée par $\vec{u}$, c'est le point d'intersection de d et du plan passant par M de vecteur normal $\vec{u}$. Dans les deux cas $d(M, \mathcal{P}) = MH$, resp. $d(M, d) = MH$.
- **Base.** Trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace : tout vecteur s'écrit alors de façon unique $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Exercice 1 Première représentation paramétrique

●○○

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point $A(2; -1; 3)$ et le vecteur $\vec{u}(1; 4; -2)$, puis la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

- 1.1 Déterminer la représentation paramétrique de d associée au point A et au vecteur $\vec{u}$.
- 1.2 Donner les coordonnées des points de d obtenus pour $t = 0$, $t = 2$ et $t = -1$.
- 1.3 Les points $B(5; 11; -3)$ et $C(0; -9; 8)$ appartiennent-ils à d ? Justifier.
- 1.4 Déterminer les coordonnées du point de d dont la cote est nulle, puis celles du point de d dont l'abscisse vaut 6.
- 1.5 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF) , où $E(1; 0; 2)$ et $F(3; -2; 6)$, en choisissant un vecteur directeur dont les coordonnées sont les plus simples possibles.

Exercice 2 Reconnaître, comparer, positionner

On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R}, \text{ ainsi que les droites} \\ z = 4 - t \end{cases}$

$$d_1 : \begin{cases} x = 7 + 4s \\ y = 1 + 2s \\ z = 2 - 2s \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2 - k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad d_3 : \begin{cases} x = 5 + m \\ y = m \\ z = 3 + 2m \end{cases} \quad d_4 : \begin{cases} x = 2 + p \\ y = p \\ z = 1 + p \end{cases}$$

où s, k, m et p décrivent $\mathbb{R}$.

- 2.1 Donner un point et un vecteur directeur de chacune des cinq droites.
- 2.2 Démontrer que d_1 et d sont confondues.
- 2.3 Déterminer la position relative de d et d_2 .
- 2.4 Démontrer que d et d_3 sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
- 2.5 Démontrer que d et d_4 ne sont ni parallèles ni sécantes : que peut-on en conclure ?

Exercice 3 Équation cartésienne d'un plan

- 3.1 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3; -1; 2)$.
- 3.2 On considère le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $2x + 5y - z - 7 = 0$. Donner un vecteur normal à $\mathcal{Q}$, puis vérifier que $B(1; 1; 0)$ et $C(0; 1; -2)$ appartiennent à $\mathcal{Q}$. Le point $D(2; 1; -3)$ appartient-il à $\mathcal{Q}$?
- 3.3 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $E(0; 3; 2)$ et parallèle à $\mathcal{Q}$.
- 3.4 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $F(4; -2; 5)$ et orthogonal à l'axe (Oz) . Quelle est l'équation du plan (xOy) ?
- 3.5 Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont-ils parallèles ? Justifier.

Exercice 4 Un plan défini par trois points

On considère $A(1; 0; 2)$, $B(3; -1; 2)$ et $C(4; 0; 1)$.

- 4.1 Démontrer que A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan $\mathcal{P}$.
- 4.2 On cherche un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ normal à $\mathcal{P}$. Traduire les conditions $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ par un système, puis démontrer que $\vec{n}(1; 2; 3)$ convient.
- 4.3 En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$, puis vérifier que B et C y appartiennent.
- 4.4 Les points $D(0; 2; 1)$ et $E(1; 1; 1)$ appartiennent-ils à $\mathcal{P}$? Que peut-on dire des quatre points A, B, C, D ?

Exercice 5 Droite et plan : les trois cas

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + 3z - 5 = 0$ et les trois droites

$$d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad d_3 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 5.1 Pour chacune des trois droites, remplacer x, y et z par leur expression dans l'équation de $\mathcal{P}$ et résoudre l'équation obtenue.
- 5.2 En déduire la position relative de chaque droite et du plan $\mathcal{P}$, en donnant le point d'intersection lorsqu'il existe.
- 5.3 Retrouver les résultats des cas d_2 et d_3 en calculant le produit scalaire du vecteur directeur et d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$, puis en testant l'appartenance d'un point au plan.

Exercice 6 Projeté orthogonal sur un plan



Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + 2y - 2z + 3 = 0$ et $M(2; 2; 0)$.

- 6.1 Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$ et calculer $\|\vec{n}\|$. Vérifier que $M \notin \mathcal{P}$.
- 6.2 Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$.
- 6.3 Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de Δ et de $\mathcal{P}$: c'est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ (figure 1).
- 6.4 En déduire la distance du point M au plan $\mathcal{P}$.
- 6.5 Vérifier que $N(3; 0; 3)$ appartient à $\mathcal{P}$, calculer MN et comparer à MH . Quelle propriété du projeté orthogonal retrouve-t-on ?
- 6.6 Déterminer les coordonnées du symétrique M' de M par rapport à $\mathcal{P}$, puis vérifier que $M' \notin \mathcal{P}$ et que $d(M', \mathcal{P}) = d(M, \mathcal{P})$.

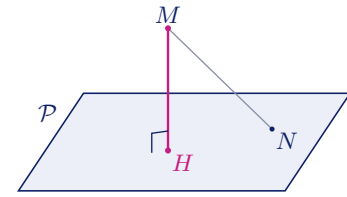


Figure 1 — Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$

Exercice 7 Projeté orthogonal sur une droite



Soit d la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R}, \text{ et } M(6; 3; 2). \end{cases}$$

- 7.1 Donner un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de d , puis vérifier que $M \notin d$.
- 7.2 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ passant par M et de vecteur normal $\vec{u}$.
- 7.3 Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de d et de $\mathcal{Q}$. Justifier que H est le projeté orthogonal de M sur d .
- 7.4 En déduire la distance du point M à la droite d .
- 7.5 Vérifier que $AM^2 = AH^2 + MH^2$ et interpréter cette égalité.

Exercice 8 Trois vecteurs forment-ils une base ?



On considère $\vec{u}(1; 2; -1)$, $\vec{v}(2; -1; 3)$, $\vec{w}(3; 1; 0)$, puis $\vec{a}(1; 2; -1)$, $\vec{b}(3; 0; 1)$ et $\vec{c}(5; 4; -1)$.

- 8.1 Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- 8.2 On cherche des réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Écrire le système correspondant et démontrer qu'il n'a pas de solution. Que peut-on en conclure pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?
- 8.3 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}(9; 8; -5)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 8.4 Démontrer que $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 9 Le plan médiateur en équation cartésienne



On considère $A(1; 3; -2)$ et $B(5; -1; 4)$. Le plan médiateur $\mathcal{M}$ de $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA = MB$.

- 9.1 Soit $M(x; y; z)$. Écrire MA^2 et MB^2 en fonction de x , y et z , puis démontrer, en développant l'égalité $MA^2 = MB^2$, que $\mathcal{M}$ a pour équation cartésienne $2x - 2y + 3z - 7 = 0$.
- 9.2 Retrouver ce résultat en utilisant le milieu I de $[AB]$ et le vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
- 9.3 Les points $P(2; 0; 1)$ et $Q(1; -1; 2)$ appartiennent-ils à $\mathcal{M}$? Pour celui qui convient, vérifier la réponse en calculant les deux distances au point A et au point B .
- 9.4 Quel est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{M}$? En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan $\mathcal{M}$.