

Approfondissement

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Pour aller plus loin : les démonstrations du cours, formule de la distance, faisceau de plans, systèmes à paramètre, sphères, perpendiculaire commune, réflexion sur un miroir

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · calculatrice autorisée
repère orthonormé dans toute la feuille

Exercice 1 La démonstration du cours : l'équation cartésienne d'un plan



L'espace est muni d'un repère orthonormé. Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur *non nul*.

1.1 On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. En traduisant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, démontrer que

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0, \quad \text{où } d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

1.2 *Réciproque.* Soient $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et d un réel; on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$. En supposant $a \neq 0$, justifier que le point $A_0(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ appartient à $\mathcal{E}$, puis démontrer que $\mathcal{E}$ est le plan passant par A_0 et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$. (Les cas $b \neq 0$ et $c \neq 0$ se traitent de la même façon.)

1.3 En déduire que les plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n}'(a'; b'; c')$ sont colinéaires.

1.4 Que devient l'équation $ax + by + cz + d = 0$ lorsque $a = b = 0$? Lorsque $c = 0$? Interpréter géométriquement dans chacun des deux cas.

1.5 *Application.* Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2; -3; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(4; -1; 5)$, puis celle du plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par l'origine. Ces deux plans sont-ils confondus?

Exercice 2 La formule de la distance d'un point à un plan



Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un point de l'espace. On pose $f(x; y; z) = ax + by + cz + d$ et $\vec{n}(a; b; c)$.

2.1 Soit Δ la droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{n}$. Écrire une représentation paramétrique de Δ , puis démontrer que le paramètre t du point d'intersection H de Δ et de $\mathcal{P}$ vérifie $t = -\frac{f(x_0; y_0; z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}$.

2.2 En déduire la formule $d(M_0, \mathcal{P}) = M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. (Cette formule n'est pas exigible : on doit savoir la redémontrer ou passer par le projeté.)

2.3 *Application.* Calculer la distance du point $M(5; 1; 3)$ au plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $2x - y + 2z - 6 = 0$, puis les coordonnées de son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}_1$.

2.4 Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2 : 2x - y + 2z + 3 = 0$ sont strictement parallèles, puis calculer la distance qui les sépare : on justifiera que tous les points de $\mathcal{P}_2$ sont à la même distance de $\mathcal{P}_1$.

2.5 Déterminer les équations cartésiennes des deux plans dont tous les points sont à la distance 2 du plan $\mathcal{P}_1$.

Exercice 3 Deux plans sécants et le faisceau qu'ils engendrent



On considère les plans $\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : x - y + z - 3 = 0$.

3.1 Démontrer que deux plans dont les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires sont toujours sécants suivant une droite. On pourra raisonner par l'absurde sur les positions relatives possibles de deux plans.

3.2 Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

3.3 Soient λ et μ deux réels non tous les deux nuls. Démontrer que l'équation

$$\lambda(x + y + z - 1) + \mu(x - y + z - 3) = 0$$

est toujours celle d'un plan (on vérifiera que le vecteur normal obtenu n'est jamais le vecteur nul) et que ce plan contient Δ . L'ensemble de ces plans est appelé le *faisceau* de plans d'axe Δ (hors programme — pour aller plus loin).

3.4 Déterminer le plan du faisceau passant par le point $A(1; 1; 1)$, puis le plan du faisceau perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

3.5 Existe-t-il un plan du faisceau parallèle à l'axe (Oy) ? Un plan du faisceau parallèle au plan (xOy) ? Justifier dans chaque cas.

Exercice 4 Trois plans dépendant d'un paramètre



Soit m un nombre réel. On considère les trois plans

$$\mathcal{P}_1 : mx + y + z = 1, \quad \mathcal{P}_2 : x + my + z = 1, \quad \mathcal{P}_3 : x + y + mz = 1,$$

et on note (S_m) le système formé par ces trois équations.

4.1 En soustrayant les équations deux à deux, démontrer que toute solution de (S_m) vérifie $(m-1)(x-y) = 0$ et $(m-1)(y-z) = 0$.

4.2 On suppose $m \neq 1$. Démontrer que $x = y = z$, puis que $(m+2)x = 1$. Conclure : pour quelles valeurs de m le système admet-il une unique solution? La déterminer.

4.3 Étudier le cas $m = 1$: décrire l'ensemble des solutions et la position relative des trois plans.

4.4 Étudier le cas $m = -2$: démontrer que le système n'a aucune solution, puis que les trois plans sont deux à deux sécants. Comment sont disposés ces trois plans?

4.5 Récapituler la discussion dans un tableau : valeurs de m , nature de l'ensemble des solutions, position relative des trois plans.

Exercice 5 Sphères, plans tangents et sphère circonscrite



(Les sphères ne sont pas au programme : cet exercice est un prolongement naturel du chapitre.) La sphère de centre $\Omega(\alpha; \beta; \gamma)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$.

5.1 Démontrer qu'une équation de cette sphère est $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$.

5.2 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0$. En regroupant les termes sous forme canonique, démontrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon.

5.3 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + 2z - 18 = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de Ω sur $\mathcal{P}$ et la distance $d(\Omega, \mathcal{P})$. En déduire que $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. On admettra que $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P} \iff M \in \mathcal{P} \text{ et } HM^2 = R^2 - \Omega H^2$.

5.4 Déterminer les équations cartésiennes des deux plans parallèles à $\mathcal{P}$ et tangents à $\mathcal{S}$ (c'est-à-dire n'ayant qu'un seul point commun avec $\mathcal{S}$).

5.5 Sphère circonscrite à un tétraèdre. On considère $A(0; 0; 0)$, $B(6; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$ et $D(2; 2; 6)$. Déterminer une équation cartésienne de chacun des trois plans médiateurs de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$, puis résoudre le système obtenu : en déduire le centre et le rayon de l'unique sphère passant par A , B , C et D .

Exercice 6 La perpendiculaire commune à deux droites



On considère les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 8 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = 4 + 2s \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}).$$

On note $A(1; 0; 2)$ et $\vec{u}(2; 1; -2)$ le point et le vecteur directeur lus sur d_1 , $B(8; -1; 4)$ et $\vec{v}(1; 2; 2)$ ceux lus sur d_2 .

- 6.1 Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et de même norme.
- 6.2 Déterminer le vecteur $\vec{w}$ orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, de norme 3, dont les coordonnées sont entières et la première coordonnée est positive.
- 6.3 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{w}$ et en déduire que d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.
- 6.4 Soient P le point de d_1 de paramètre t et Q le point de d_2 de paramètre s . Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis traduire par un système les conditions $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$. Démontrer que $t = 1$ et $s = -1$.
- 6.5 En déduire les coordonnées de P et Q , puis vérifier que $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{w}$: la droite (PQ) est la *perpendiculaire commune* à d_1 et d_2 . Calculer PQ .
- 6.6 Soient M un point quelconque de d_1 et N un point quelconque de d_2 . En écrivant $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN}$, démontrer que $MN^2 = PQ^2 + \|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}\|^2$, puis que $MN \geq 6$. Quelle est la plus courte distance entre les deux droites ?

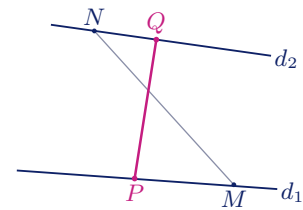


Figure 1 — La perpendiculaire commune (PQ)

Exercice 7 Un rayon laser sur un miroir plan



Un miroir plan occupe le plan $\mathcal{M}$ d'équation $x + 2y + 2z - 6 = 0$. Un rayon laser part de la source $S(5; 2; 3)$ et frappe le miroir au point $I(0; 1; 2)$; il se réfléchit ensuite en un rayon issu de I (figure 2). On admet la loi de la réflexion sous la forme suivante : le rayon réfléchi est porté par la droite $(S'I)$, où S' est le symétrique de S par rapport au miroir.

- 7.1 Vérifier que I appartient à $\mathcal{M}$ et que S n'y appartient pas.
- 7.2 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de S sur $\mathcal{M}$, puis la distance de la source au miroir.
- 7.3 En déduire les coordonnées du symétrique S' de S par rapport à $\mathcal{M}$, et vérifier que S et S' sont à la même distance du miroir.
- 7.4 Déterminer une représentation paramétrique du rayon réfléchi, c'est-à-dire de la droite $(S'I)$.
- 7.5 Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{M}$. Calculer le cosinus de l'angle aigu que $\overrightarrow{SI}$ forme avec $\vec{n}$, puis celui que $\overrightarrow{IS'}$ forme avec $\vec{n}$: que constate-t-on ? Donner une mesure commune de ces deux angles, arrondie au dixième de degré.
- 7.6 Un capteur est placé dans le plan horizontal d'équation $z = 5$. Déterminer les coordonnées du point où le rayon réfléchi atteint ce capteur.

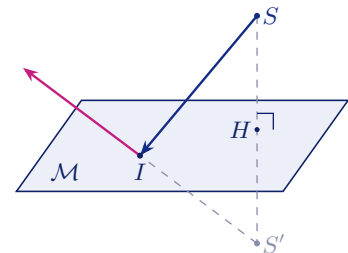


Figure 2 — Le rayon incident et le rayon réfléchi