

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 1



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac Raisonnement par récurrence

Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, suite auxiliaire, algorithme de seuil — QCM

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : **/ 12**

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Aucune notion de limite n'est nécessaire.

Exercice 1 Le repeuplement d'un lac

7 pts ●●○

Un lac de montagne a été repeuplé en truites : au 1^{er} juin 2026, on y dénombre 2 000 truites. Pour prévoir l'évolution de cette population, on utilise le modèle de Beverton-Holt, couramment employé en gestion des pêches. On note u_n le nombre de truites, **en milliers**, au 1^{er} juin de l'année 2026 + n . Ainsi $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{18 u_n}{u_n + 12}.$$

Partie A — Étude de la fonction associée

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{18x}{x+12}$, de sorte que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1.1 Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$,
 $f'(x) = \frac{216}{(x+12)^2}$. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- 1.2 Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
- 1.3 Sur la figure 1, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d d'équation $y = x$, puis construit sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 .
 - a) Expliquer comment le terme u_1 a été construit à partir de u_0 .
 - b) Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur un majorant de cette suite ?

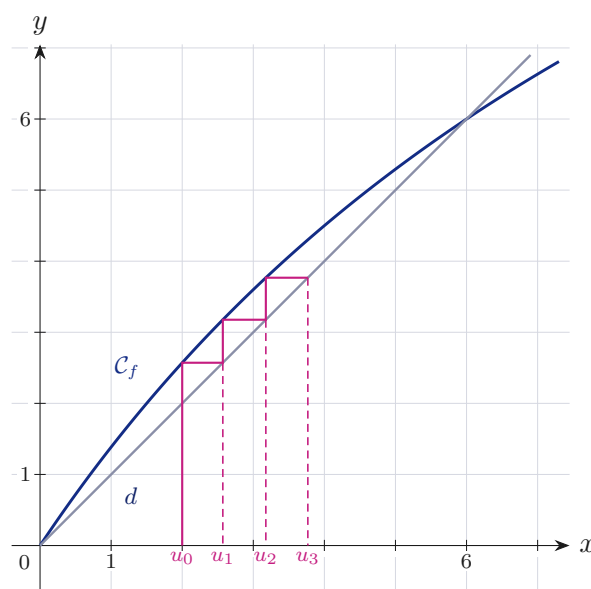


Figure 1 — Courbe $\mathcal{C}_f$, droite d d'équation $y = x$ et premiers termes de (u_n)

Partie B — Étude de la suite (u_n)

- 1.4 Calculer u_1 et u_2 : on donnera les valeurs exactes, puis les valeurs arrondies à 10^{-3} . Interpréter la valeur de u_2 dans le contexte de l'exercice.
- 1.5 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.
- 1.6 Que peut-on en déduire pour l'évolution du nombre de truites selon ce modèle ?

Partie C — Expression de u_n en fonction de n et recherche d'un seuil

D'après la partie B, tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs. Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \frac{6}{u_n} - 1.$$

1.7 Calculer v_0 , puis démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

1.8 Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{6}{1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

1.9 Le gestionnaire du lac affirme : « avec ce modèle, la population finira par dépasser 6 000 truites ». A-t-il raison ? Justifier à l'aide de l'expression de u_n .

1.10 On souhaite déterminer l'année à partir de laquelle le lac comptera au moins S milliers de truites. On a écrit pour cela la fonction Python seuil ci-dessous.

```
1 def seuil(S):
2     n = 0
3     u = 2
4     while u < S:
5         u = ...
6         n = ...
7     return n
```

- a) Recopier et compléter les lignes 5 et 6 de cette fonction.
- b) Déterminer la valeur renvoyée par l'appel seuil(5). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- c) Expliquer pourquoi, d'après la partie B, l'appel seuil(7) ne peut pas renvoyer de résultat.

Exercice 2 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre choisie.

- 2.1** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Pour tout entier naturel n , on a :
- a) $u_n = 2n + 3$ b) $u_n = 2^{n+1} + 1$ c) $u_n = 3 \times 2^n - n$ d) $u_n = 2^n + 2$
- 2.2** Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété : « $2^n > 5n$ ». On peut affirmer que :
- a) $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . b) $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 5$.
 - c) $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$. d) $P(n)$ est fausse pour tout entier naturel n .
- 2.3** Parmi les inégalités suivantes, laquelle est vraie pour tout entier naturel n ?
- a) $1,5^n \geq 1 + 1,5n$ b) $1,5^n \geq n^2$ c) $1,5^n \geq 1 + 0,5n$ d) $1,5^n \geq 1,5n$
- 2.4** Soit g une fonction croissante sur $[0 ; 4]$ telle que $g(0) = 1$ et $g(4) = 3$. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = g(w_n)$. On peut affirmer que :
- a) la suite (w_n) est décroissante. b) pour tout entier naturel n , $w_n \geq 1$.
 - c) la suite (w_n) est arithmétique. d) la suite (w_n) est croissante.
- 2.5** On considère la fonction Python ci-dessous. Quelle est la valeur renvoyée par l'appel mystere(4) ?

```
1 def mystere(n):
2     u = 2
3     for k in range(n):
4         u = 3*u - 2
5     return u
```

- a) 28 b) 80 c) 82 d) 244