

# Fiche de cours Raisonnement par récurrence

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

## 1 LE PRINCIPE DE RÉCURRENCE

**Définition.** Une **propriété**  $P(n)$  est un énoncé qui dépend d'un entier naturel  $n$  et qui, pour chaque valeur de  $n$ , est vrai ou faux.

**Théorème — principe de récurrence.** Soit  $n_0$  un entier naturel et  $P(n)$  une propriété définie pour tout entier  $n \geq n_0$ . Si

- **initialisation** :  $P(n_0)$  est vraie ;
- **hérédité** : pour tout entier  $n \geq n_0$ , «  $P(n)$  vraie » entraîne «  $P(n+1)$  vraie » ;

alors  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

**Remarque.** On l'illustre par une file de dominos : le premier tombe (initialisation) et chaque domino qui tombe fait tomber le suivant (hérédité), donc tous tombent.

## 2 RÉDIGER UNE RÉCURRENCE

**Méthode — les quatre temps de la rédaction.** (1) Énoncer la propriété : « Pour tout entier  $n \geq n_0$ , on note  $P(n)$  la propriété : ... »  
 (2) **Initialisation** : calculer séparément les deux membres pour  $n = n_0$  et conclure que  $P(n_0)$  est vraie. (3) **Hérédité** : « Soit  $n \geq n_0$  un entier quelconque. Supposons  $P(n)$  vraie » (**hypothèse de récurrence**) ; écrire ce que l'on veut démontrer, c'est-à-dire  $P(n+1)$  ; partir de  $u_{n+1}$  (ou du membre de gauche de  $P(n+1)$ ), utiliser la relation de récurrence puis l'hypothèse. (4) **Conclusion** : «  $P(n_0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire : d'après le principe de récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ . »

### ✗ ATTENTION — les deux étapes sont indispensables

- Une propriété *héréditaire non initialisée* peut être fausse pour tout  $n$  : «  $4^n + 1$  est divisible par 3 » est héréditaire, mais  $4^0 + 1 = 2$  n'est pas divisible par 3 ; elle n'est vraie pour aucun  $n$ .
- Vérifier la propriété pour quelques valeurs ne démontre rien : cela permet seulement de **conjecturer**.

## 3 LES QUATRE SITUATIONS CLASSIQUES

**Propriété — expression explicite.** Pour une suite définie par  $u_{n_0}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on conjecture  $u_n$  (calculs ou programme Python), puis on démontre par récurrence la propriété  $P(n)$  : «  $u_n = \dots$  ».

**Propriété — somme ou produit.** Le terme de rang  $n+1$  s'obtient en ajoutant (ou en multipliant par) un terme au terme précédent :  $S_{n+1} = S_n +$  (terme suivant). On remplace alors  $S_n$  par l'hypothèse de récurrence, puis on factorise.

**Propriété — inégalité, encadrement, monotonie.** Pour  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  **croissante** sur un intervalle contenant les termes,  $m \leq u_n \leq M$  donne  $f(m) \leq u_{n+1} \leq f(M)$  : l'encadrement se transmet lorsque  $f(m) \geq m$  et  $f(M) \leq M$  ; de même  $u_n \leq u_{n+1}$  donne  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$  (monotonie).

**Propriété — divisibilité.** Un entier  $a$  est divisible par  $d$  lorsqu'il existe un entier  $k$  tel que  $a = dk$ . Dans l'hérédité, on écrit l'hypothèse sous la forme  $a_n = dk$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , on exprime  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ , puis on **factorise par  $d$** .

**Remarque.** Pour **conjecturer** l'expression d'un terme, on calcule les premiers termes à la main ou avec une boucle Python (`u = u0` puis `for k in range(n): u = ...`) ; la récurrence vient ensuite **démontrer** la conjecture.

### ■ FORMULAIRE — sommes et inégalités à connaître

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  ;  $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$  ;  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
- Somme géométrique ( $q \neq 1$ ) :  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .
- **Inégalité de Bernoulli** : pour tout réel  $a \geq 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

## 4 L'INÉGALITÉ DE BERNOULLI

**Théorème.** Pour tout réel  $a \geq 0$  et tout entier naturel  $n$  :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

*Idée de la démonstration (exigible).*  $P(0)$  :  $(1 + a)^0 = 1 \geq 1$ . Hérédité : comme  $1 + a > 0$ ,

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \times (1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a,$$

car  $na^2 \geq 0$ . La multiplication par  $1 + a$  conserve le sens de l'inégalité **parce que**  $1 + a > 0$ .

**Remarque.** Cette inégalité sert à démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  lorsque  $q > 1$  : en écrivant  $q = 1 + a$  avec  $a > 0$ , on a  $q^n \geq 1 + na$ , qui tend vers  $+\infty$ .

## 5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

### ► SAVOIR-FAIRE

- Énoncer clairement  $P(n)$ , puis écrire  $P(n + 1)$  en remplaçant  $n$  par  $n + 1$  partout.
- Rédiger les trois étapes d'une récurrence : initialisation, hérédité, conclusion.
- Démontrer une expression explicite, une égalité de somme, une inégalité, une divisibilité.
- Démontrer qu'une suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  est encadrée, puis monotone, en utilisant la croissance de  $f$ .
- Établir l'inégalité de Bernoulli et l'utiliser pour minorer  $q^n$  avec  $q > 1$ .
- Conjecturer un résultat (calculs à la main ou programme Python) avant de le démontrer.

## 6 EXEMPLES TYPES

### ★ EXEMPLE — expression explicite

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 3u_n - 2$ . Montrons que  $u_n = 3^n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . *Initialisation* :  $u_0 = 2$  et  $3^0 + 1 = 2$ , donc  $P(0)$  est vraie. *Hérédité* : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n = 3^n + 1$ . Alors  $u_{n+1} = 3(3^n + 1) - 2 = 3^{n+1} + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$  :  $P(n + 1)$  est vraie. *Conclusion* : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 3^n + 1$ .

### ★ EXEMPLE — égalité de somme

Montrons que  $S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  pour tout  $n \geq 1$ .  $S_1 = 1 = \frac{1 \times 2}{2}$  : vrai au rang 1. Si  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ , alors  $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , qui est bien la formule au rang  $n + 1$ . Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

### ★ EXEMPLE — divisibilité

Montrons que  $7^n - 1$  est divisible par 6 pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$  :  $7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$ . Si  $7^n - 1 = 6k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 6 = 7 \times 6k + 6 = 6(7k + 1)$ , avec  $7k + 1 \in \mathbb{Z}$ . Par récurrence, c'est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### ★ EXEMPLE — encadrement et monotonie

Soit  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ . Si  $0 \leq u_n \leq 6$ , alors  $3 \leq \frac{1}{2}u_n + 3 \leq 6$ , donc  $0 \leq u_{n+1} \leq 6$  : l'encadrement est héréditaire et vrai au rang 0, donc vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus  $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n \geq 0$  car  $u_n \leq 6$  : la suite est **croissante et majorée**.

### ✗ PIÈGES

- Ne jamais écrire « supposons que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n$  » : l'entier  $n$  de l'hérédité est un entier fixé quelconque.
- L'hérédité seule ne prouve rien sans initialisation ; l'initialisation seule ne prouve rien sans hérédité.
- Commencer l'initialisation au bon rang  $n_0$  : une inégalité peut n'être vraie qu'à partir d'un certain rang.
- Dans l'hérédité, il faut *utiliser* l'hypothèse de récurrence : une démonstration qui ne s'en sert pas est suspecte (ou la récurrence est inutile).
- Multiplier une inégalité par un nombre *négatif* en change le sens : vérifier le signe avant de conclure.