

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 1



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Raisonnement par récurrence

Les bases : rédiger une récurrence — formules, sommes, inégalités, divisibilité

8 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Énoncer clairement la propriété $P(n)$, écrire $P(n+1)$ et rédiger les trois étapes d'une récurrence.
- Démontrer par récurrence une formule explicite, une somme, une inégalité (dont celle de Bernoulli), l'encadrement ou le sens de variation d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, une divisibilité.

■ RAPPEL — Le principe de récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on considère un entier $n \geq n_0$ *quelconque*, on suppose que $P(n)$ est vraie (*hypothèse de récurrence*) et on démontre qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 1 Écrire $P(n+1)$

●○○

Dans chaque cas, $P(n)$ est une propriété qui dépend d'un entier naturel n . Écrire la propriété $P(n+1)$.

- | | |
|--|--|
| a) $P(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n - 1$ » | b) $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ » |
| c) $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ » | d) $P(n)$: « $5^n - 1$ est un multiple de 4 » |
| e) $P(n)$: « $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ » | f) $P(n)$: « $u_n = \frac{n}{2n+1}$ » |

Pour la propriété e), vérifier $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$. Ces vérifications prouvent-elles que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$?

Exercice 2 Une rédaction à compléter

●○○

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + 3$.2.1 Pour démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2^{n+2} - 3$, recopier et compléter la rédaction suivante.Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = \dots\dots\dots$ ».**Initialisation.** Pour $n = 0$: $u_0 = \dots\dots$ et $2^{0+2} - 3 = \dots\dots$. Donc $\dots\dots\dots$ **Hérédité.** Soit n un entier naturel. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\dots\dots\dots$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \dots\dots\dots$.On a : $u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2 \times (\dots\dots\dots) + 3 = 2^{n+3} - \dots\dots + 3 = \dots\dots\dots$. Donc $\dots\dots\dots$ **Conclusion.** $P(0)$ est vraie et la propriété $P(n)$ est $\dots\dots\dots$: d'après le principe de récurrence, $\dots\dots\dots$ 2.2 En déduire la valeur de u_{10} , puis le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 3 Une inégalité vraie à partir d'un certain rang

●○○

3.1 L'inégalité $2^n \geq 2n + 1$ est-elle vraie pour $n = 1$? pour $n = 2$? pour $n = 3$?3.2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 3$, $2^n \geq 2n + 1$.

Exercice 4 Conjecturer avec Python, puis démontrer

●○○

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.

On a écrit en Python la fonction `terme` ci-contre : l'appel `terme(n)` renvoie une valeur approchée de u_n . Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs obtenues, arrondies à 10^{-4} .

```
1 def terme(n):
2     u = 1
3     for k in range(n):
4         u = u / (u + 1)
5     return u
```

n	0	1	2	3	4	9	99
<code>terme(n)</code>	1	0,5	0,3333	0,25	0,2	0,1	0,01

4.1 Calculer à la main la valeur exacte de u_2 (l'appel `terme(2)` n'en renvoie qu'une valeur approchée).

4.2 Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n , puis démontrer cette conjecture par récurrence.

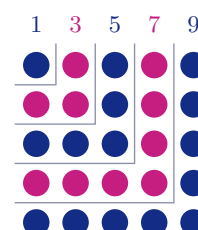
Exercice 5 Somme des premiers nombres impairs

●○○

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ la somme des n premiers entiers naturels impairs.

5.1 Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4 , puis conjecturer l'expression de S_n en fonction de n . Expliquer comment la figure ci-contre illustre cette conjecture.

5.2 Justifier que $S_{n+1} = S_n + 2n + 1$, puis démontrer la conjecture.



Exercice 6 L'inégalité de Bernoulli (démonstration du cours)

●●○

Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

6.1 Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

6.2 Soit n un entier naturel pour lequel $P(n)$ est vraie.

a) Justifier que $(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$. Quelle hypothèse sur a a-t-on utilisée ?

b) Développer $(1 + na)(1 + a)$, puis en déduire que $P(n + 1)$ est vraie.

6.3 Conclure. Quelle inégalité, valable pour tout entier naturel n , obtient-on en choisissant $a = 2$?

6.4 Application : justifier sans calculatrice que $1,05^{20} \geq 2$, puis que $1,001^{5000} \geq 6$.

Exercice 7 Encadrer une suite, étudier ses variations

●●○

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. On rappelle que la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$: si $0 \leq a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

7.1 Calculer u_1 et u_2 (valeurs exactes, puis valeurs arrondies à 10^{-3}).

7.2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$.

7.3 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$. Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?

Exercice 8 Divisibilité : l'initialisation est indispensable

●●○

On rappelle qu'un entier a est divisible par 3 lorsqu'il existe un entier k tel que $a = 3k$.

8.1 Vérifier que $4^n - 1$ est divisible par 3 pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

8.2 Soit n un entier naturel tel que $4^n - 1 = 3k$, où k est un entier. Exprimer $4^{n+1} - 1$ en fonction de k et montrer que $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3. Que vient-on de démontrer pour tout entier naturel n ?

8.3 On note $Q(n)$ la propriété : « $4^n + 1$ est divisible par 3 ». Démontrer que la propriété $Q(n)$ est héréditaire. Est-elle vraie pour $n = 0$? pour $n = 1$? Que retenir de cet exemple ?