

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 1



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement

Raisonnement par récurrence

Pour aller plus loin : raisonnements fins, grands classiques et problème ouvert

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Autour de l'inégalité de Bernoulli

●●●

- 1.1** Soit a un réel tel que $a \geq -1$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$. Préciser à quelle étape de la démonstration l'hypothèse $a \geq -1$ est utilisée.
- 1.2** L'inégalité reste-t-elle vraie pour $a = -4$ et $n = 3$?
- 1.3** Soit q un réel tel que $q > 1$ et soit A un réel. En écrivant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, montrer que $q^n \geq A$ dès que $n \geq \frac{A-1}{q-1}$.
- 1.4** En déduire un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $1,01^n \geq 10^6$. Déterminer ensuite, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $1,01^n \geq 10^6$. Commenter.
- 1.5** Soit $a \geq 0$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$.

Exercice 2 Renforcer l'hypothèse de récurrence

●●●

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. On veut démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n \leq 2$.

- 2.1** Expliquer pourquoi l'hérédité de la propriété « $S_n \leq 2$ » ne peut pas être établie directement.
- 2.2** Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
- 2.3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. Conclure.

Exercice 3 Où est l'erreur ?

●●●

On prétend démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la propriété $P(n)$: « dans toute boîte de n crayons de couleur, tous les crayons sont de la même couleur » est vraie. Voici la « démonstration » proposée.

Initialisation. Dans une boîte d'un seul crayon, tous les crayons sont de la même couleur : $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. On considère une boîte de $n+1$ crayons, numérotés de 1 à $n+1$. D'après $P(n)$, les crayons 1 à n sont de la même couleur ; de même, les crayons 2 à $n+1$ sont de la même couleur. Les crayons 2 à n étant communs aux deux groupes, les $n+1$ crayons sont tous de la même couleur : $P(n+1)$ est vraie.

- 3.1** Examiner l'argument d'hérédité lorsque $n = 1$ (passage de $P(1)$ à $P(2)$). Que constate-t-on ?
- 3.2** Pour quelles valeurs de n l'argument d'hérédité est-il correct ? Expliquer pourquoi la conclusion n'en est pas moins fausse.

Exercice 4 Trois grands classiques



Démontrer par récurrence chacune des propriétés suivantes. On rappelle qu'un entier a est divisible par un entier non nul d lorsqu'il existe un entier k tel que $a = dk$.

- 4.1** Pour tout entier naturel n , l'entier $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. *Aide : $3^{2n+3} = 9 \times 3^{2n+1}$ et $9 = 7 + 2$.*
- 4.2** Pour tout entier naturel n , l'entier $n^3 + 5n$ est divisible par 6. *Aide : le produit $n(n+1)$ de deux entiers consécutifs est pair.*
- 4.3** Pour tout entier $n \geq 2$, $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Exercice 5 Dérivées successives (hors programme — pour aller plus loin)



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$. On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n+1)}$ la dérivée de la fonction $f^{(n)}$: c'est la dérivée $(n+1)$ -ième de f .

- 5.1** Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
- 5.2** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe deux réels a_n et b_n tels que, pour tout réel x , $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n) e^x$, et établir que $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.
- 5.3** Exprimer a_n en fonction de n , puis démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = n(n-1)$.
- 5.4** En déduire l'expression de $f^{(n)}(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f^{(10)}(x) = 0$.

Exercice 6 Suite de Fibonacci et récurrence double (hors programme — pour aller plus loin)



La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- 6.1** Calculer les termes F_2 à F_{10} .
- 6.2** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.
- 6.3 Principe de récurrence double** : si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et si, pour tout entier naturel n , « $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies » entraîne « $P(n+2)$ vraie », alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .
Démontrer ainsi que, pour tout entier naturel n , $F_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$. *Aide : comparer $\frac{5}{3} + 1$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^2$.*
- 6.4** Démontrer par récurrence (simple) que, pour tout entier $n \geq 1$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 7 Problème ouvert : paver avec des triominos



Un *triomino* est une pièce en forme de L qui recouvre exactement trois cases d'un quadrillage. On considère un échiquier carré de 2^n cases de côté ($n \geq 1$) auquel on a retiré une case quelconque.

- 7.1** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ et quelle que soit la case retirée, l'échiquier peut être entièrement recouvert par des triominos, sans chevauchement.
Aide (figure 1) : partager l'échiquier de côté 2^{n+1} en quatre échiquiers de côté 2^n et placer d'abord un triomino au centre.
- 7.2** Combien de triominos faut-il pour recouvrir l'échiquier de la figure 1 ? En comptant les cases recouvertes dans le cas général, retrouver le fait que $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout entier $n \geq 1$.

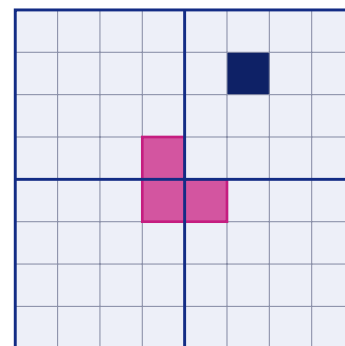


Figure 1 — Cas $n = 3$: case retirée (en foncé) et premier triomino