

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 9



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac

Primitives et équations différentielles

QCM — Qualité de l'air d'une salle de classe : équation différentielle, étude et aération

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (5 points et 7 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute limite doit être justifiée, tout calcul de primitive ou de dérivée détaillé, et chaque résultat numérique donné avec la précision demandée.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Dans les réponses, C désigne un réel quelconque.

- 1.1** Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ est la fonction :
- a) $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \ln x$ b) $x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$ c) $x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^2}$ d) $x \mapsto x^2 + \ln x$
- 1.2** La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -0,5y$ vérifiant $y(2) = 1$ est la fonction :
- a) $x \mapsto e^{-0,5x}$ b) $x \mapsto e^{1-0,5x}$ c) $x \mapsto e^{-0,5x+2}$ d) $x \mapsto e^{0,5x-1}$
- 1.3** Soit F la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ telle que $F(0) = 3$. Pour tout réel x , $F(x)$ est égal à :
- a) $\ln(x^2+1)$ b) $\ln(x^2+1) + 3$ c) $3\ln(x^2+1)$ d) $2\ln(x^2+1) + 3$
- 1.4** Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + y = 6$ sont les fonctions :
- a) $x \mapsto Ce^{-0,5x} + 6$ b) $x \mapsto Ce^{0,5x} + 6$ c) $x \mapsto Ce^{-2x} + 6$ d) $x \mapsto Ce^{-0,5x} - 6$
- 1.5** On applique la méthode d'Euler de pas 0,5 à l'équation $y' = 2y$ avec $y(0) = 1$. La valeur approchée de $y(1)$ ainsi obtenue est :
- a) 2 b) 3 c) 4 d) e^2

Exercice 2 La qualité de l'air d'une salle de classe

7 pts ●●○

Dans une salle de classe occupée par une classe entière, un capteur mesure la teneur de l'air en dioxyde de carbone, exprimée en *ppm* (parties par million) : l'air extérieur en contient environ 400 ppm, et l'on considère que l'air devient de mauvaise qualité au-delà de 1 000 ppm.

La ventilation mécanique renouvelle l'air à débit constant tandis que les occupants produisent du dioxyde de carbone à un rythme constant. On modélise la teneur $c(t)$ de l'air de la salle, en ppm, t minutes après le début de l'occupation, par la fonction c définie et dérivable sur $[0; +\infty[$, solution de

$$(E) : \quad c'(t) = -0,05c(t) + 70, \quad c(0) = 400.$$

Partie A — Résolution de l'équation différentielle

2.1 Déterminer la solution constante de (E) et interpréter cette valeur dans le contexte.

2.2 Résoudre l'équation différentielle $y' = -0,05y + 70$ sur $[0; +\infty[$, puis démontrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$c(t) = 1400 - 1000e^{-0,05t}.$$

Partie B — Étude de la fonction c

2.3 Étudier les variations de c sur $[0; +\infty[$, puis déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$. En déduire une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de c et interpréter ce résultat dans le contexte.

2.4 Calculer $c''(t)$ pour tout $t \geq 0$. En déduire que c est concave sur $[0; +\infty[$, puis interpréter ce résultat en termes de vitesse d'augmentation de la teneur en dioxyde de carbone.

2.5 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, puis démontrer que T coupe l'asymptote horizontale au point d'abscisse 20.

2.6 Par lecture graphique sur la figure 1, donner un encadrement d'amplitude 5 minutes de l'instant auquel la teneur atteint 1 000 ppm.

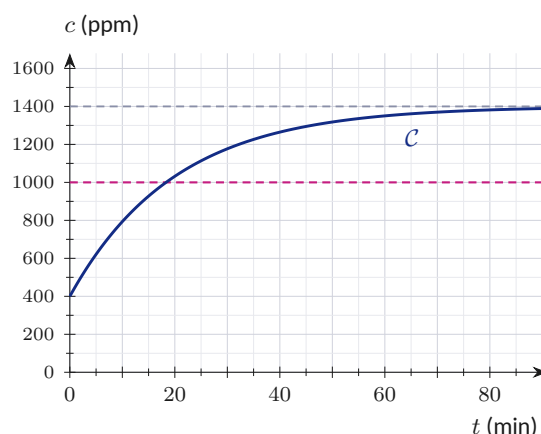


Figure 1 — Teneur en CO_2 de la salle (ventilation normale)

Partie C — Ouvrir les fenêtres

2.7 Déterminer la valeur exacte, puis l'arrondi à 10^{-2} , de l'instant t_0 auquel la teneur atteint 1 000 ppm. Convertir ce résultat en minutes et secondes (à la seconde près). Ce résultat est-il compatible avec la lecture graphique de la question 2.6 ?

2.8 À l'instant t_0 , l'enseignant ouvre les fenêtres : le renouvellement de l'air devient dix fois plus efficace. On note $g(s)$ la teneur en dioxyde de carbone de la salle, en ppm, s minutes après l'ouverture des fenêtres. On admet que g est solution sur $[0; +\infty[$ de

$$g'(s) = -0,5g(s) + 250, \quad g(0) = 1000.$$

a) Déterminer la solution constante de cette équation différentielle et la comparer à celle de la partie A. Commenter.

b) Déterminer l'expression de $g(s)$ pour tout $s \geq 0$, puis étudier les variations de g et déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s)$.

c) Déterminer la valeur exacte, puis l'arrondi à 10^{-1} minute, de la durée d'aération nécessaire pour que la teneur redescende à 600 ppm.

2.9 Les fenêtres restent ouvertes pendant 5 min. Calculer la teneur en dioxyde de carbone à la fermeture des fenêtres, arrondie à l'unité.

2.10 La fonction seuil ci-contre renvoie, pour la ventilation normale de la partie A, le premier nombre entier de minutes au bout duquel la teneur atteint un seuil s donné. Recopier et compléter les lignes 8 et 9, puis donner la valeur renvoyée par `seuil(1000)`. Ce résultat est-il cohérent avec la question 2.7 ?

2.11 Comparer la durée mise par la salle pour passer de 400 à 1 000 ppm et la durée d'aération obtenue à la question 2.8 c). Quelle recommandation pratique peut-on en tirer pour l'enseignant ?

```
1 from math import exp
2
3 def c(t):
4     return 1400 - 1000*exp(-0.05*t)
5
6 def seuil(s):
7     t = 0
8     while ... :
9         t = ...
10    return t
```