

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 9



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Primitives et équations différentielles

Les bases : reconnaître et calculer une primitive, résoudre $y' = ay$ et $y' = ay + b$

6 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre ; calculer une primitive d'une fonction de référence ou d'une forme usuelle ($u'e^u$, $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u^2}$) ; déterminer la primitive vérifiant une condition donnée.
- Résoudre $y' = ay$ ou $y' = ay + b$, avec ou sans condition initiale ; reconnaître l'allure des courbes solutions.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Primitive.** F est une primitive de f sur un intervalle I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$: F est donc solution de $y' = f$. Toute fonction continue sur I admet des primitives (admis) et deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante : elles sont les $x \mapsto F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$. Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ donnés, une unique primitive vérifie $F(x_0) = y_0$.
- **Fonctions de référence.** $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$; sur $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ si $n \leq -2$) ; $\frac{1}{x} \rightarrow \ln x$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$; $\exp \rightarrow \exp$; $\cos \rightarrow \sin$; $\sin \rightarrow -\cos$.
- **Formes usuelles** (u dérivable sur I) : $u'e^u \rightarrow e^u$; $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$; u ne s'annulant pas si $n \leq -2$) ; $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u$ (si $u > 0$) ; $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$ (si $u > 0$) ; $\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u}$ (si u ne s'annule pas) ; plus généralement $(v' \circ u) \times u' \rightarrow v \circ u$.
- **Équations différentielles** ($a \neq 0$). Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ sont les $x \mapsto Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$; celles de $y' = ay + b$ sont les $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$, la constante $-\frac{b}{a}$ étant la solution particulière constante. Une condition initiale $y(x_0) = y_0$ détermine C , donc une unique solution.

Exercice 1 Reconnaître une primitive

●○○

On considère les trois couples de fonctions suivants, définis sur l'intervalle I indiqué : $f(x) = (2x - 1)e^x$ et $F(x) = (2x - 3)e^x$ sur $I = \mathbb{R}$; $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x \ln x - x$ sur $I =]0 ; +\infty[$; $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ et $H(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ sur $I = \mathbb{R}$.

- 1.1 Dans chaque cas, démontrer que la fonction notée en majuscule est une primitive de l'autre sur I , puis en déduire l'ensemble des primitives sur I .
- 1.2 Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, puis la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 2 Les fonctions de référence

●○○

- 2.1 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$ b) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$ c) $f(x) = -\frac{5}{x^3}$ sur $]0 ; +\infty[$

d) $f(x) = \frac{4}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$ f) $f(x) = e^x + 3$ sur $\mathbb{R}$

g) $f(x) = 2 \sin x - \cos x$ sur $\mathbb{R}$ h) $f(x) = (3x - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$ i) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$

- 2.2 Déterminer ensuite l'unique primitive F de f sur I vérifiant la condition indiquée.

- a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$, $F(1) = 2$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, $F(e) = 3$
 c) $f(x) = 2e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$, $F(0) = 5$ d) $f(x) = \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$, $F(0) = 0$

Exercice 3 Les formes usuelles

●●○

Pour chaque fonction, préciser la forme reconnue et la fonction u choisie, puis en déterminer une primitive sur l'intervalle indiqué.

- a) $f(x) = 2x e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ b) $f(x) = (3x^2 + 2)(x^3 + 2x)^4$ sur $\mathbb{R}$
 c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ d) $f(x) = \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ sur $\mathbb{R}$
 e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ f) $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 Résoudre une équation différentielle

●●○

4.1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles suivantes.

- a) $y' = 3y$ b) $y' = -0,5y$ c) $2y' + y = 0$
 d) $y' + 4y = 0$ e) $5y' = 2y$ f) $y' = \frac{y}{3}$

4.2 Pour chaque équation, donner la solution constante, puis l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.

- a) $y' = 2y + 6$ b) $y' = -y + 4$ c) $y' = 0,5y - 2$
 d) $y' + 2y = 10$ e) $3y' = y - 6$ f) $4y' + y = 2$

4.3 Déterminer, dans chaque cas, l'unique solution vérifiant la condition initiale donnée.

- a) $y' = 2y$ et $y(0) = 5$ b) $y' = -2y + 10$ et $y(0) = 2$ c) $y' = -0,5y + 3$ et $y(0) = 0$

Exercice 5 Une famille de courbes solutions

●●○

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -y + 3$. La figure 1 représente quatre courbes solutions de (E) ainsi que la droite Δ d'équation $y = 3$.

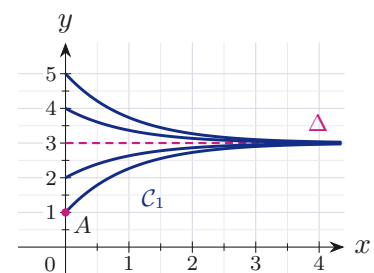


Figure 1 — Quatre courbes solutions de (E)

5.1 Vérifier que la fonction constante égale à 3 est solution de (E) , puis donner l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

5.2 La courbe C_1 passe par le point $A(0; 1)$. Déterminer l'expression de la solution f correspondante.

5.3 Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0) = 5$, puis résoudre $g(x) = 3,5$ (valeur exacte, puis arrondi à 10^{-2}).

5.4 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Que peut-on dire de toutes les solutions de (E) en $+\infty$? Interpréter graphiquement.

Exercice 6 La décroissance radioactive

●●○

Un échantillon contient initialement N_0 noyaux d'iode 131. Le nombre $N(t)$ de noyaux encore présents à l'instant t , exprimé en jours, vérifie $N'(t) = -\lambda N(t)$, où $\lambda > 0$ est la constante radioactive du nucléide.

6.1 Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 , de λ et de t , puis justifier que N est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

6.2 La demi-vie de l'iode 131 vaut $t_{1/2} = 8,0$ j : démontrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{8,0}$, puis donner sa valeur arrondie à 10^{-3} , avec son unité. Quelle proportion des noyaux initiaux reste-t-il au bout de 24 j ? (Sans calculatrice.)

6.3 Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours il reste moins de 1 % des noyaux initiaux (arrondir à 10^{-1}).