

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 9



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Primitives et équations différentielles

Vrai ou faux, primitives de formes composées, chute avec frottement, équation

$$y' = ay + f$$

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un contre-exemple explicite ou par un calcul. Tout calcul de primitive doit être justifié (forme reconnue, fonction u choisie) et peut être contrôlé par dérivation. Les valeurs approchées seront données avec la précision demandée et accompagnées de leur unité. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 Affirmation :** « la fonction $F : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$ ».
- 1.2 Affirmation :** « si deux fonctions F et G dérivables sur $\mathbb{R}$ ont la même fonction dérivée, alors $F = G$ ».
- 1.3 Affirmation :** « la fonction $x \mapsto 5e^{-0,4x} + 3$ est solution de l'équation différentielle $y' = -0,4y + 1,2$ ».
- 1.4 Affirmation :** « toute solution de l'équation différentielle $y' = 0,5y - 4$ a pour limite 8 en $+\infty$ ».

Exercice 2 Primitives de formes composées

5 pts ●●○

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué, en précisant la forme reconnue et la fonction u choisie.

- 2.1** $f(x) = (6x - 3)(x^2 - x + 4)^3$ sur $\mathbb{R}$.
- 2.2** $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$ sur $\mathbb{R}$.
- 2.3** $h(x) = \sin x \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$.
- 2.4** $k(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1; +\infty[$.
- 2.5** Déterminer enfin la primitive F de m sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$, où $m(x) = \frac{e^x}{(e^x + 2)^2}$.

Exercice 3 Une équation $y' = ay + f$

4 pts ●●●

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 4x + 6$ et l'équation $(E_0) : y' = -2y$.

- 3.1** Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 2$ est solution de (E) .
- 3.2** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0) .
- 3.3** En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

- 3.4** Déterminer la solution u de (E) vérifiant $u(0) = 3$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$, puis étudier la position de la courbe de u par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 2$.

Exercice 4 La chute d'un parachutiste

7 pts ●●●

Un parachutiste saute d'un avion sans vitesse initiale. Avant l'ouverture du parachute, sa vitesse $v(t)$, exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, t secondes après le saut, est modélisée par l'équation différentielle

$$v'(t) = 10 - 0,2 v(t), \quad v(0) = 0,$$

où le terme 10 correspond à l'accélération de la pesanteur, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, et le terme $-0,2 v$ au freinage dû à l'air.

- 4.1** Donner la solution constante de cette équation différentielle. Cette valeur est appelée *vitesse limite* du parachutiste : l'exprimer aussi en kilomètres par heure.
- 4.2** Déterminer l'expression de $v(t)$ pour tout $t \geq 0$.
- 4.3** Étudier les variations de v sur $[0; +\infty[$ et déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Interpréter ces résultats.
- 4.4** Calculer $v(2)$, $v(5)$ et $v(10)$, arrondis à 10^{-2} .
- 4.5** Déterminer la valeur exacte, puis l'arrondi à 10^{-2} , de l'instant auquel le parachutiste atteint 90 % de sa vitesse limite.
- 4.6** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de v au point d'abscisse 0, puis démontrer que T coupe l'asymptote horizontale au point d'abscisse 5. (*Cette durée est appelée temps caractéristique du mouvement.*)
- 4.7** Le parachutiste ouvre son parachute 12 s après le saut. Calculer sa vitesse à cet instant, arrondie à 10^{-1} , puis la convertir en kilomètres par heure. Cette vitesse est-elle très différente de la vitesse limite ? Commenter.
- 4.8** Tracer, dans le repère ci-dessous (à rendre avec la copie), l'asymptote horizontale en pointillés, la tangente T , puis l'allure de la courbe de v .

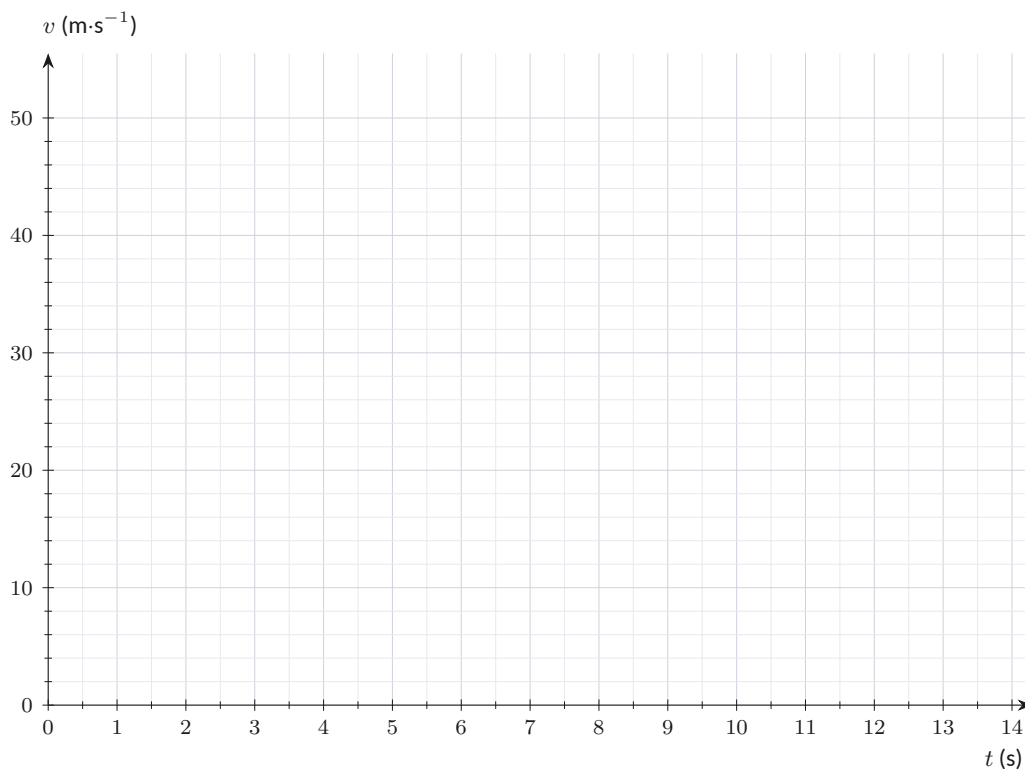


Figure 1 — Repère à compléter