

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 9



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle A Primitives et équations différentielles

Calcul de primitives, équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$, dépollution d'un bassin

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Tout calcul de primitive doit être justifié : forme reconnue, fonction u choisie, vérification éventuelle par dérivation. Pour une équation différentielle, on précisera la forme $y' = ay + b$ utilisée avant d'écrire l'ensemble des solutions. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x}$ est la fonction :
- a) $x \mapsto -\frac{3}{x^2}$ b) $x \mapsto 3 \ln x$ c) $x \mapsto \frac{3}{x^2}$ d) $x \mapsto 3\sqrt{x}$
- 1.2** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = x e^{x^2}$ est la fonction :
- a) $x \mapsto e^{x^2}$ b) $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2}$ c) $x \mapsto 2 e^{x^2}$ d) $x \mapsto \frac{x^2}{2} e^{x^2}$
- 1.3** Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ sont les fonctions :
- a) $x \mapsto C e^{5x}$ b) $x \mapsto C e^{-5x}$ c) $x \mapsto C e^{-x/5}$ d) $x \mapsto -5 C e^x$
- 1.4** La solution de l'équation différentielle $y' = 4y - 12$ vérifiant $y(0) = 5$ est la fonction :
- a) $x \mapsto 3 + 2 e^{4x}$ b) $x \mapsto 3 + 2 e^{-4x}$ c) $x \mapsto -3 + 8 e^{4x}$ d) $x \mapsto 5 e^{4x} - 12$
- 1.5** Soit F la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ telle que $F(1) = 0$. Alors $F(9)$ est égal à :
- a) 2 b) 4 c) 6 d) 16

Exercice 2 Calculer des primitives

5 pts ●○○○

- 2.1** Déterminer une primitive de f sur $]0; +\infty[$, où $f(x) = 6x^2 - 4x + \frac{3}{x^2}$.
- 2.2** Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$, où $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$. (On justifiera d'abord que $x^2+x+3 > 0$ pour tout réel x .)
- 2.3** Déterminer une primitive de h sur $\mathbb{R}$, où $h(x) = 3 \cos x + e^{-2x}$.
- 2.4** Déterminer la primitive F de k sur $\mathbb{R}$ telle que $F(2) = 1$, où $k(x) = (2x-3)^4$.

Exercice 3 Deux primitives diffèrent d'une constante

4 pts ●●○

On admet le résultat suivant : une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est nulle sur I est constante sur I .

- 3.1** Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient F et G deux primitives de f sur I . On pose $H = F - G$. Démontrer que H est dérivable sur I , calculer H' , puis en déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.
- 3.2 Application.** Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x \ln x$.
- a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
- b) En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0; +\infty[$, puis déterminer celle qui s'annule en 1.

Exercice 4 La dépollution d'un bassin

6 pts ●●○

Un bassin de retenue reçoit les eaux de ruissellement d'une zone industrielle. On y installe un dispositif de traitement qui élimine chaque semaine 25 % du polluant présent, tandis que la zone continue d'apporter chaque semaine $1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ de polluant. On note $c(t)$ la concentration en polluant du bassin, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, t semaines après la mise en service du dispositif. On modélise la situation par

$$c'(t) = -0,25c(t) + 1, \quad c(0) = 12.$$

- 4.1** Donner la solution constante de cette équation différentielle et interpréter cette valeur dans le contexte.
- 4.2** Déterminer l'expression de $c(t)$ pour tout $t \geq 0$.
- 4.3** Étudier les variations de c sur $[0; +\infty[$, puis déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$. Interpréter ces deux résultats.
- 4.4** Calculer $c(4)$ et $c(10)$, arrondis à 10^{-2} .
- 4.5** La réglementation impose une concentration inférieure ou égale à $5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Déterminer la valeur exacte, puis l'arrondi à 10^{-2} , de l'instant à partir duquel cette norme est respectée. En déduire le nombre entier de semaines de traitement nécessaires.
- 4.6** Le dispositif peut-il faire descendre la concentration jusqu'à $3,5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$? Justifier. Tracer enfin, dans le repère ci-dessous (à rendre avec la copie), l'asymptote horizontale en pointillés puis l'allure de la courbe de c .

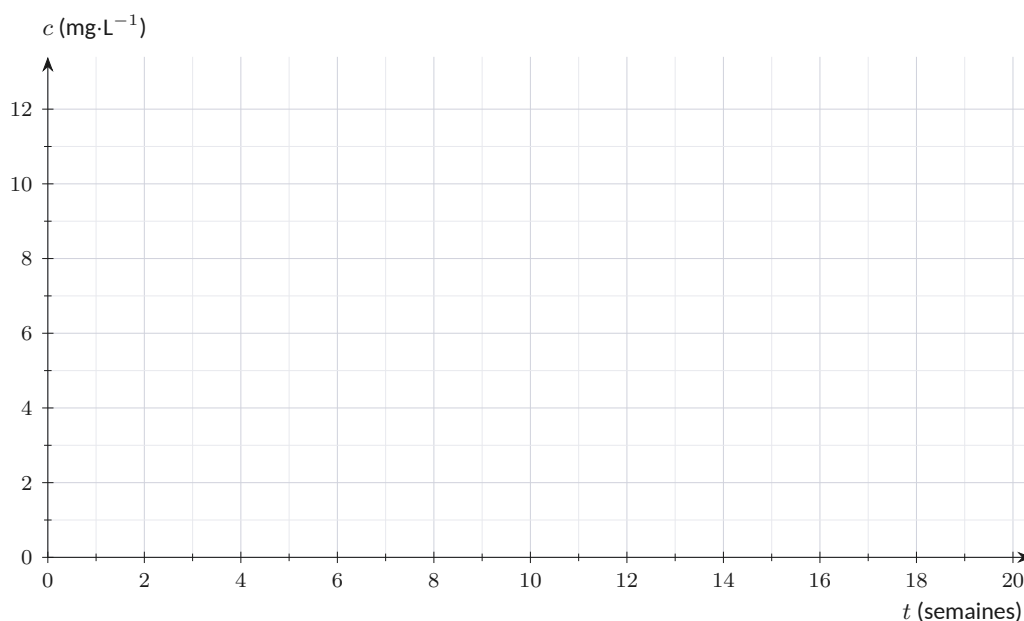


Figure 1 — Repère à compléter