

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 9



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement

Primitives et équations différentielles

Pour aller plus loin : démonstrations du cours, équation logistique, mélange, méthode d'Euler

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Les démonstrations du cours

●●●

Soient a un réel non nul et b un réel. On note (E_0) l'équation différentielle $y' = ay$ et (E) l'équation $y' = ay + b$. On admet qu'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle est constante.

- 1.1 Vérifier que, pour tout réel C , la fonction $x \mapsto Ce^{ax}$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
- 1.2 Réciproquement, soit f une solution de (E_0) ; on pose $g(x) = f(x)e^{-ax}$. Calculer $g'(x)$, puis conclure : les solutions de (E_0) sont exactement les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$.
- 1.3 Démontrer que, x_0 et y_0 étant deux réels donnés, (E_0) admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$, et exprimer $f(x)$.
- 1.4 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $h(x) = f(x) + \frac{b}{a}$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si h est solution de (E_0) , puis en déduire l'ensemble des solutions de (E) .
- 1.5 **Application.** Résoudre $y' = 3y - 2$, puis déterminer la solution vérifiant $y(1) = 4$ (valeur exacte).

Exercice 2 L'équation logistique

●●●

On introduit des poissons dans un lac. Leur nombre, exprimé en centaines d'individus, est modélisé par une fonction P dérivable et strictement positive sur $[0; +\infty[$ vérifiant l'équation logistique

$$P'(t) = 0,5 P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{10} \right), \quad P(0) = 1,$$

où t est le temps écoulé en années. Cette équation n'est pas du type $y' = ay + b$: un changement de fonction va nous y ramener.

- 2.1 On pose $z(t) = \frac{1}{P(t)}$. Justifier que z est dérivable sur $[0; +\infty[$, puis démontrer que $z'(t) = -0,5 z(t) + 0,05$.
- 2.2 Résoudre cette équation différentielle avec la condition $z(0) = 1$, puis en déduire que, pour tout $t \geq 0$, $P(t) = \frac{10}{1 + 9e^{-0,5t}}$.
- 2.3 Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$ et interpréter : cette valeur est la *capacité d'accueil* du lac. Justifier que $0 < P(t) < 10$ pour tout $t \geq 0$, puis que P est strictement croissante.
- 2.4 Déterminer la valeur exacte, puis l'arrondi à 10^{-2} , de l'instant où la population atteint la moitié de la capacité d'accueil.
- 2.5 Démontrer que la vitesse de croissance P' est maximale exactement à cet instant. (On pourra étudier la fonction $u \mapsto 0,05 u(10 - u)$ sur $]0; 10[$.) Que représente ce point pour la courbe de P ?

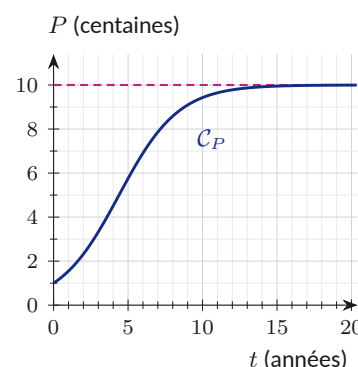


Figure 1 — La courbe logistique

Exercice 3 Une équation $y' = ay + f$ 

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + e^x$.

- 3.1** Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -e^x$ est solution de (E) .
- 3.2** Démontrer qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $f - u$ est solution de $y' = 2y$. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
- 3.3** Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$ et vérifier que $f(x) = e^x(e^x - 1)$.
- 3.4** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe de f et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
- 3.5** Montrer que $f'(x) = e^x(2e^x - 1)$, puis dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$ (valeur exacte du minimum et abscisse correspondante).
- 3.6** Résoudre $f(x) = 0$, en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$ et une équation de la tangente en 0.

Exercice 4 Une cuve de saumure

Une cuve contient 400 L de saumure où sont dissous 10 kg de sel. À partir de $t = 0$, on y injecte une solution à 0,25 kg de sel par litre au débit de $8 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$; le mélange, maintenu homogène, s'évacue par un trop-plein au même débit, si bien que le volume reste égal à 400 L. On note $q(t)$ la masse de sel, en kilogrammes, présente à l'instant t exprimé en minutes.

- 4.1** Justifier que la masse de sel entrant chaque minute vaut 2 kg, que la masse sortant chaque minute vaut $\frac{q(t)}{50}$, puis que $q'(t) = -0,02 q(t) + 2$.
- 4.2** Donner la solution constante de cette équation et retrouver cette valeur par un raisonnement physique sur la concentration finale.
- 4.3** Déterminer l'expression de $q(t)$, puis étudier ses variations et sa limite en $+\infty$.
- 4.4** Déterminer la valeur exacte, puis l'arrondi à 10^{-2} , de l'instant où la cuve contient 50 kg de sel.
- 4.5** Déterminer l'instant à partir duquel la masse de sel dépasse 99 % de sa valeur limite (arrondir à la minute).

Exercice 5 La méthode d'Euler mise à l'épreuve

On applique la méthode d'Euler de pas $h > 0$ à l'équation $y' = y$ avec $y(0) = 1$, dont la solution exacte est $\exp$. On pose $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = y_n + h y_n$: y_n approche e^{nh} après n étapes.

- 5.1** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $y_n = (1 + h)^n$.
- 5.2** En utilisant l'inégalité $\ln(1 + t) \leq t$, valable pour tout $t > -1$, démontrer que $(1 + h)^n \leq e^{nh}$: la méthode d'Euler sous-estime donc toujours la solution ici.
- 5.3** Calculer y_{10} pour $h = 0,1$, puis y_{1000} pour $h = 0,001$ (arrondis à 10^{-5}); comparer à e et donner l'erreur relative en pourcentage, arrondie à 10^{-2} .
- 5.4** On fixe $nh = 1$, c'est-à-dire $h = \frac{1}{n}$. Justifier que $\ln y_n = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\ln$ entre 1 et $1 + \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln y_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Exercice 6 Chercher une primitive sous une forme donnée (pour aller plus loin)

On peut parfois deviner la forme d'une primitive, puis identifier ses coefficients après dérivation.

- 6.1** Déterminer les réels a et b tels que $x \mapsto (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto xe^{2x}$, puis les réels a, b, c tels que $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (x^2 + 1)e^x$.
- 6.2** Vérifier que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ pour $x > -1$, puis en déduire une primitive de $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ sur $] -1; +\infty[$. En utilisant $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, déterminer de même une primitive de $\cos^2$, puis de $\sin^2$, sur $\mathbb{R}$.