

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 13



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac

Orthogonalité et distances dans l'espace

Une verrière pyramidale : orthogonalité, aires, volumes et distances — puis un QCM et un Vrai/Faux justifié

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

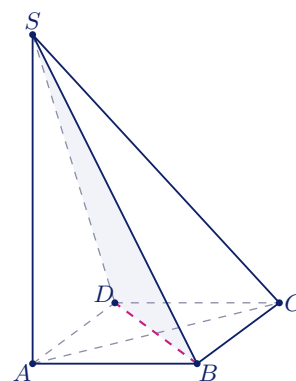
★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute orthogonalité doit être justifiée par un produit scalaire ou par un théorème du cours clairement énoncé. Les longueurs, aires et volumes seront donnés sous forme exacte et les angles arrondis au dixième de degré.

Exercice 1 Une verrière pyramidale

7 pts ●●○

Une verrière a la forme de la pyramide $SABCD$ représentée sur la figure 1 : sa base $ABCD$ est un carré horizontal de côté 3 m et son montant $[SA]$ est un pilier vertical de hauteur 6 m. L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 m, où $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{6}\vec{AS}$. Les parties A, B et D sont largement indépendantes ; la partie C utilise les résultats de la partie B.

Figure 1 — La verrière $SABCD$

Partie A — Orthogonalité

- 1.1 Donner les coordonnées des points B , C , D et S dans ce repère.
- 1.2 Démontrer que la droite (SA) est orthogonale au plan (ABC) de la base.
- 1.3 Démontrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AS} = 0$, puis que la droite (AB) est orthogonale au plan (SAD) . En déduire que les droites (AB) et (SD) sont orthogonales.
- 1.4 Quelle est la nature du triangle SAB ? Calculer son aire.

Partie B — Aires et volumes

- 1.5 Calculer les longueurs exactes BD , SB et SD .
- 1.6 Calculer $\vec{SB} \cdot \vec{SD}$, puis démontrer que $\cos \widehat{BSD} = \frac{4}{5}$. En déduire $\sin \widehat{BSD}$, puis démontrer que l'aire du triangle SBD est égale à $13,5 \text{ m}^2$.
- 1.7 Calculer le volume de la verrière $SABCD$.
- 1.8 Calculer le volume du tétraèdre $ABDS$, puis en déduire celui du tétraèdre $CBDS$ sans nouveau calcul de hauteur.

Partie C — Distances au plan (SBD)

- 1.9 À l'aide des questions 1.6 et 1.8, déterminer la distance du point A au plan (SBD) , puis celle du point C à ce même plan. Que constate-t-on ?
- 1.10 Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 2; 1)$ est un vecteur normal au plan (SBD) et calculer $\|\vec{n}\|$.

- 1.11** On note H le projeté orthogonal de A sur le plan (SBD) : il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$. En utilisant la distance obtenue à la question 1.9, déterminer k , puis les coordonnées de H .
- 1.12** Vérifier que $\overrightarrow{BH} = \frac{4}{9}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BS}$: le point H appartient bien au plan (SBD) .
- 1.13** Un câble rectiligne relie le sommet S au coin C de la base. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{SCA}$ que ce câble forme avec le plan horizontal de la base.

Partie D — Un point mobile sur le câble

Un capteur est placé au point M du segment $[SC]$ défini par $\overrightarrow{SM} = t\overrightarrow{SC}$, où t est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

- 1.14** Exprimer les coordonnées de M en fonction de t , puis démontrer que $BM^2 = 54t^2 - 90t + 45$.
- 1.15** Étudier ce trinôme du second degré et déterminer la valeur de t pour laquelle la distance BM est minimale, ainsi que la valeur exacte de ce minimum.
- 1.16** Pour cette valeur de t , vérifier que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$. Qu'a-t-on ainsi déterminé pour le point B et la droite (SC) ?

Exercice 2 QCM et Vrai/Faux

5 pts ●●○

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(3; 0; 1)$ et $C(2; 3; 2)$.

Partie 1 — Questionnaire à choix multiples (3 points)

Pour chacune des trois questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 2.1** Les vecteurs $\vec{u}(2; -1; 3)$ et $\vec{v}(1; 5; 1)$ sont :
- a) colinéaires b) orthogonaux c) de même norme d) égaux
- 2.2** La distance AB est égale à :
- a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{6}$ c) 6 d) 12
- 2.3** Dans cette question seulement, $ABCDEFGH$ désigne un cube d'arête a , $[AG]$ étant une grande diagonale et $[AC]$ une diagonale de la face $ABCD$. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$ est égal à :
- a) a^2 b) $a^2\sqrt{2}$ c) $2a^2$ d) $3a^2$

Partie 2 — Vrai ou faux ? (2 points)

Pour chacune des deux affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse **en justifiant** : une démonstration si l'affirmation est vraie, un contre-exemple explicite si elle est fausse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 2.4 Affirmation 1.** Le vecteur $\vec{n}(2; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) , et le triangle ABC n'est pas rectangle en A .
- 2.5 Affirmation 2.** Si une droite d est orthogonale à deux droites *distinctes* d'un plan $\mathcal{P}$, alors d est orthogonale à $\mathcal{P}$.