

Fiche de cours

Orthogonalité et distances dans l'espace

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Définition. Deux vecteurs de l'espace admettent toujours des représentants coplanaires : leur **produit scalaire** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est celui calculé dans ce plan. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$, où θ est l'angle géométrique des deux vecteurs ; si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété — symétrie et bilinéarité. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$, et $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (noté $\vec{u}^2$).

Propriété — développements et polarisation. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right).$$

Méthode — dans une figure. Décomposer les vecteurs par la relation de Chasles sur des vecteurs dont on connaît les normes et les angles, puis développer par bilinéarité ; les termes orthogonaux disparaissent.

2 REPÈRE ORTHONORMÉ, NORME ET DISTANCE

Définition. Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormée** si les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 ; un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors orthonormé.

Propriété. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz', \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Remarque. L'angle θ entre deux vecteurs non nuls s'obtient par $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, avec $\theta \in [0; \pi]$.

3 ORTHOGONALITÉ

Définition. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Deux droites sont **orthogonales** lorsque leurs vecteurs directeurs le sont ; si de plus elles sont sécantes, elles sont **perpendiculaires**.

Théorème — droite orthogonale à un plan. Si une droite d est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, alors elle est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$: on dit que d est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Définition. Un **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur $\vec{n} \neq \vec{0}$ d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$. Alors $M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, pour $A \in \mathcal{P}$ fixé.

Propriété. Deux plans sont parallèles $\iff$ leurs vecteurs normaux sont colinéaires ; une droite est parallèle à un plan $\iff$ son vecteur directeur est orthogonal à un vecteur normal du plan.

Définition. Le **plan médiateur** de $[AB]$ ($A \neq B$) est l'ensemble des points M tels que $MA = MB$: c'est le plan passant par le milieu de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

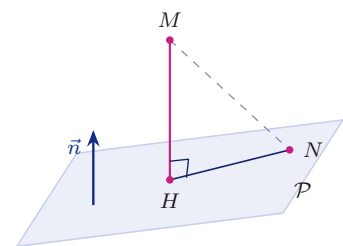


Figure 1 — H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$: pour tout N de $\mathcal{P}$, $MN \geqslant MH$.

4 PROJETÉ ORTHOGONAL, DISTANCES, AIRES ET VOLUMES

Définition. Le **projeté orthogonal** de M sur une droite d (resp. sur un plan $\mathcal{P}$) est l'unique point H de d (resp. de $\mathcal{P}$) tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à d (resp. à $\mathcal{P}$).

Théorème. H est le point de d (resp. de $\mathcal{P}$) le plus proche de M , et $d(M, d) = MH$ (resp. $d(M, \mathcal{P}) = MH$). *Idée :* pour $N \neq H$, le triangle MHN est rectangle en H , donc $MN^2 = MH^2 + HN^2 > MH^2$.

Méthode — calculer un projeté. Sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$: écrire $\overrightarrow{AH} = t\vec{u}$ puis résoudre $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$, ce qui donne $t = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$. Sur un plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$: écrire $\overrightarrow{AH} = s\vec{u} + t\vec{v}$ et résoudre le système $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété — aires et volumes. Aire du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \theta$, où $\theta = \widehat{BAC}$ s'obtient par le produit scalaire ; on peut aussi écrire $\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times d(C, (AB))$. Volume d'un tétraèdre : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$, où h est la distance du sommet au plan de base.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer un produit scalaire par les coordonnées, par norme et angle, ou par décomposition dans une figure.
- Calculer une norme, une distance entre deux points, un angle ; démontrer qu'un triangle est rectangle.
- Démontrer que deux vecteurs, deux droites, ou une droite et un plan sont orthogonaux ; reconnaître ou déterminer un vecteur normal.
- Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan, puis la distance correspondante.
- Calculer une aire de triangle et un volume de tétraèdre ; caractériser un plan médiateur.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — angle entre deux vecteurs

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(1; 2; -2)$ et $\vec{v}(3; 0; 4)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 0 - 8 = -5$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$. Donc $\cos \theta = \frac{-5}{15} = -\frac{1}{3}$ et $\theta \approx 109,5^\circ$: l'angle est obtus.

★ EXEMPLE — vecteur normal à un plan

Soit $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 1)$: $\overrightarrow{AB}(-1; 2; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$ ne sont pas colinéaires. Le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ vérifie $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 + 2 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 0 + 2 = 0$: c'est un vecteur normal au plan (ABC) .

★ EXEMPLE — projeté orthogonal sur une droite

Soit d la droite passant par $O(0; 0; 0)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; 2)$, et $M(3; 0; 3)$. Avec $\overrightarrow{OH} = t\vec{u}$: $t = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{3 + 0 + 6}{9} = 1$, donc $H(1; 2; 2)$. Alors $\overrightarrow{MH}(-2; 2; -1)$ et $d(M, d) = MH = 3$.

✗ PIÈGES

- Les formules $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ n'ont de sens que dans un repère **orthonormé**.
- Dans l'espace, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes : « perpendiculaires » signifie en plus sécantes.
- Pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il faut deux droites du plan *sécantes* : deux droites parallèles ne suffisent pas.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'entraîne pas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$; et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$.
- Ne pas confondre distance et longueur d'un segment quelconque : $d(M, \mathcal{P})$ se calcule avec le projeté orthogonal, jamais avec un point quelconque du plan.