

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 13



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Orthogonalité et distances dans l'espace

Les bases : produit scalaire, norme, distance, orthogonalité, vecteur normal, projeté orthogonal

9 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Calculer un produit scalaire (coordonnées, norme et angle, décomposition dans une figure), une norme, une distance, un angle.
- Démontrer une orthogonalité de vecteurs, de droites, d'une droite et d'un plan ; reconnaître un vecteur normal ; déterminer un projeté orthogonal et une distance.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Produit scalaire.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ (θ angle des deux vecteurs non nuls) et $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Il est *symétrique* et *bilinéaire* : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$. On en déduit $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, puis les *formules de polarisation* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- **En repère orthonormé.** Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- **Orthogonalité.** $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; deux droites sont orthogonales lorsque leurs vecteurs directeurs le sont. *Théorème* : une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$; elle est dite orthogonale à $\mathcal{P}$, et l'un de ses vecteurs directeurs est un *vecteur normal* à $\mathcal{P}$.
- **Projeté et distance.** Le projeté orthogonal H de M sur une droite d (ou un plan $\mathcal{P}$) est le point de d (ou de $\mathcal{P}$) le plus proche de M : $d(M, d) = MH$. Tétrahèdre : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$.

Exercice 1 Produit scalaire et coordonnées

●○○

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère $\vec{u}(2; -1; 3)$, $\vec{v}(4; 5; -1)$ et $\vec{w}(1; 2; 1)$.

- 1.1 Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{v} \cdot \vec{w}$, puis $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$ (valeurs exactes). Quels vecteurs sont orthogonaux entre eux ?
- 1.2 Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ de deux façons : à l'aide des coordonnées de $\vec{v} + \vec{w}$, puis par bilinéarité.
- 1.3 Déterminer m pour que $\vec{u} \perp \vec{t}(m; 1; -2)$, puis p pour que $\vec{a}(1; -2; 3) \perp \vec{b}(p; 2; p)$.

Exercice 2 Un triangle dans l'espace

●○○

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2; -1)$, $B(3; -2; 1)$ et $C(5; 0; 3)$.

- 2.1 Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et les longueurs exactes AB , AC , BC .
- 2.2 Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$: qu'en déduit-on ? Vérifier que $AB^2 + BC^2 = AC^2$ et nommer le théorème retrouvé.
- 2.3 Calculer l'aire exacte de ABC . Soit I le milieu de $[AC]$: déterminer ses coordonnées et démontrer que $IA = IB = IC$.

Exercice 3 Produits scalaires dans un cube



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 cm (figure 1). Aucun repère n'est utilisé ici : on décompose les vecteurs à l'aide des arêtes issues de A .

3.1 Justifier que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

3.2 En déduire les produits scalaires suivants.

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}$
 d) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$ e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ f) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}$

3.3 Calculer les longueurs exactes AC et AG .

3.4 En déduire la valeur exacte de $\cos \widehat{BAG}$, puis une mesure de cet angle arrondie au dixième de degré.

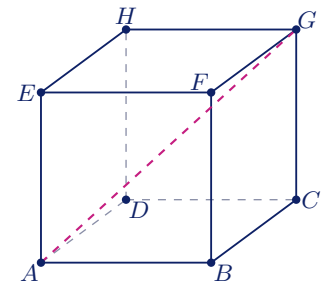


Figure 1 — Le cube $ABCDEFGH$

Exercice 4 Normes, angles et polarisation



4.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$, puis les valeurs exactes de $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

4.2 Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vérifient $\|\vec{a}\| = 4$, $\|\vec{b}\| = 7$ et $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 9$. Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$, puis une mesure de l'angle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ arrondie au dixième de degré.

4.3 Démontrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$, puis vérifier cette formule sur l'exemple de la question 4.1.

4.4 En repère orthonormé, donner la valeur exacte en degrés de l'angle de $\vec{p}(1; 1; 0)$ et $\vec{q}(1; 0; 1)$, puis $\cos \theta$ et θ arrondi au dixième de degré pour $\vec{r}(2; 1; 2)$ et $\vec{s}(1; 2; 2)$.

Exercice 5 Une droite orthogonale à un plan



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3, les sommets étant placés comme sur la figure 1. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$.

5.1 Donner les coordonnées des huit sommets du cube dans ce repère.

5.2 Calculer $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE}$. Les droites (AC) et (AE) étant sécantes en A et contenues dans le plan (ACE) , qu'en déduit-on pour la droite (BD) et le plan (ACE) ?

5.3 En déduire, sans nouveau calcul, que (BD) et (AG) sont orthogonales, puis vérifier ce résultat par un produit scalaire.

Exercice 6 Triangle équilatéral et vecteur normal



Dans un repère orthonormé, on considère $A(1; 0; 2)$, $B(3; 2; 2)$, $C(1; 2; 4)$ et le vecteur $\vec{n}(1; -1; 1)$.

6.1 Démontrer que ABC est équilatéral ; en déduire sans nouveau calcul $\widehat{BAC}$ et l'aire exacte de ABC .

6.2 Justifier que A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$, démontrer que $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ et donner un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de norme 1.

6.3 Soit $D(2; -1; 3)$. Démontrer que la droite (AD) est orthogonale à $\mathcal{P}$, puis donner le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$ et la distance de D à $\mathcal{P}$.

Exercice 7 Distance d'un point à une droite



Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$ et $M(5; 1; 2)$. On note d la droite (AB) et H le projeté orthogonal de M sur d (figure 2).

- 7.1** Vérifier que M n'appartient pas à d .
- 7.2** Comme $H \in d$, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}$: exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{MH}$ en fonction de t , traduire l'orthogonalité de $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{AB}$ par une équation, puis démontrer que $t = 2$.
- 7.3** En déduire les coordonnées de H et la valeur exacte de la distance de M à d .
- 7.4** Vérifier que $AM^2 = AH^2 + MH^2$ et interpréter cette égalité.

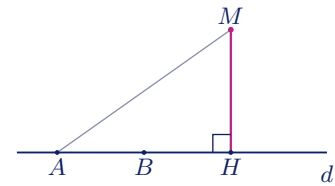


Figure 2 — Le projeté orthogonal H de M sur d

Exercice 8 Le plan médiateur d'un segment



Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2; 3)$ et $B(5; -2; 1)$. Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA = MB$.

- 8.1** Calculer la longueur AB et déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
- 8.2** Soit M un point de l'espace. En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, démontrer que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$. En déduire que $MA = MB \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$: le plan médiateur de $[AB]$ est donc le plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
- 8.3** Le point $P(4; 3; -2)$ appartient-il au plan médiateur de $[AB]$? Et le point $Q(2; 1; 4)$? Justifier de deux façons pour P : par un produit scalaire, puis en calculant PA et PB .
- 8.4** Quel est le projeté orthogonal de A sur le plan médiateur de $[AB]$? En déduire la distance de A à ce plan.

Exercice 9 Le tétraèdre régulier



$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a : ses six arêtes ont la même longueur a et ses quatre faces sont des triangles équilatéraux (figure 3). On note I le milieu de $[CD]$.

- 9.1** Justifier que l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ mesure 60° , puis calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de a .
- 9.2** En écrivant $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Que peut-on en déduire pour les arêtes $[AB]$ et $[CD]$?
- 9.3** Démontrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ (on pourra écrire $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$), puis que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABI) .
- 9.4** Calculer la longueur AI en fonction de a , puis l'aire du triangle ACD .
- 9.5** Soit G le centre de gravité du triangle BCD ; on admet que G est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) et que $BG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Calculer la hauteur AG , puis le volume du tétraèdre en fonction de a .

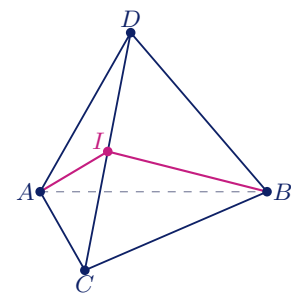


Figure 3 — Le tétraèdre régulier $ABCD$