

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 13



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 2 Orthogonalité et distances dans l'espace

Problèmes : tétraèdres, cube, mât haubané, pyramide, pavé droit — aires, volumes, angles et distances

7 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Choisir un repère orthonormé adapté à un solide, démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan, déterminer un vecteur normal, un projeté orthogonal et une distance.
- Calculer une aire, un volume et un angle dans un solide; modéliser une situation concrète et interpréter les résultats.

➤ MÉTHODE — Distance d'un point à un plan : les deux stratégies

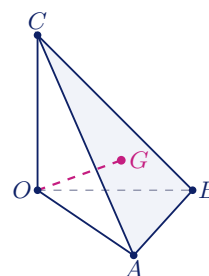
- **Par le projeté.** On devine (ou l'énoncé donne) un point H du plan tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à deux vecteurs *non colinéaires* du plan : H est alors le projeté orthogonal de M et $d(M, \mathcal{P}) = MH$.
- **Par le volume.** Dans un tétraèdre, $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$: en calculant le volume d'une façon commode puis l'aire de la face visée, on obtient la hauteur h , c'est-à-dire la distance du sommet opposé au plan de cette face. Pour une aire : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$, avec $\cos \widehat{BAC}$ obtenu par produit scalaire.

Exercice 1 Le tétraèdre trirectangle

●●○

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$ et $C(0; 0; 6)$ (figure 1).

- 1.1 Démontrer que les trois arêtes $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ sont deux à deux orthogonales, puis que la droite (OC) est orthogonale au plan (OAB) .
- 1.2 Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
- 1.3 Démontrer que le triangle ABC est équilatéral et calculer son aire exacte.
- 1.4 Soit $G(2; 2; 2)$. Vérifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$: le point G appartient donc au plan (ABC) .
- 1.5 Démontrer que $\overrightarrow{OG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Que représente G pour le point O et le plan (ABC) ?
- 1.6 En déduire la distance du point O au plan (ABC) , puis vérifier la cohérence de ce résultat avec les questions 1.2 et 1.3.

Figure 1 — Le tétraèdre $OABC$

Exercice 2 La grande diagonale du cube

●●○

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3 : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, E étant le sommet au-dessus de A , F au-dessus de B , G au-dessus de C et H au-dessus de D . On travaille dans le repère orthonormé $(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$.

- 2.1 Donner les coordonnées des huit sommets, puis celles des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.
- 2.2 Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .

- 2.3** Soit $K(1; 1; 1)$. Démontrer que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$, puis que K est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE) . En déduire la distance du point A au plan (BDE) .
- 2.4** Démontrer que le triangle BDE est équilatéral et calculer son aire exacte.
- 2.5** Calculer le volume du tétraèdre $ABDE$ de deux façons différentes et vérifier que les deux résultats coïncident.
- 2.6** Calculer la valeur exacte de $\cos \widehat{BAG}$, puis une mesure de l'angle entre la grande diagonale (AG) et l'arête (AB) , arrondie au dixième de degré.

Exercice 3 Un mât haubané



Un mât vertical $[OS]$ de 6 m de hauteur est fixé au sol en O et maintenu par quatre haubans tendus entre son sommet S et quatre pitons P, Q, R et T scellés dans le sol horizontal. L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 m, tel que $S(0; 0; 6)$, $P(8; 0; 0)$, $Q(0; 8; 0)$, $R(-8; 0; 0)$ et $T(0; -8; 0)$ (figure 2).

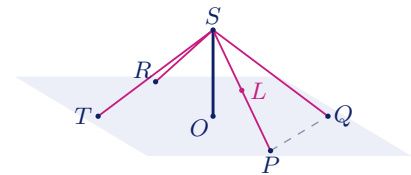


Figure 2 — Le mât et ses quatre haubans

- 3.1** Démontrer que la droite (OS) est orthogonale au plan du sol (OPQ) . Quelle propriété du mât ce calcul traduit-il ?
- 3.2** Calculer la longueur d'un hauban.
- 3.3** Calculer une mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle que le hauban $[SP]$ forme avec le mât $[SO]$.
- 3.4** Calculer une mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle $\widehat{PSQ}$ formé par deux haubans consécutifs.
- 3.5** Le projeté orthogonal H de S sur la droite (PQ) est le milieu de $[PQ]$: le justifier par un produit scalaire, puis calculer la distance de S à la droite (PQ) (valeur exacte, puis arrondie au centimètre).
- 3.6** Un projecteur est fixé au milieu L du hauban $[SP]$. Calculer la distance OL du pied du mât au projecteur.

Exercice 4 Une pyramide à base carrée



$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de côté 6 et dont le sommet S est situé à la verticale du centre O du carré, à la hauteur 4 (figure 3). On munit l'espace d'un repère orthonormé dans lequel $A(0; 0; 0)$, $B(6; 0; 0)$, $C(6; 6; 0)$, $D(0; 6; 0)$ et $S(3; 3; 4)$. On note M le milieu de $[AB]$.

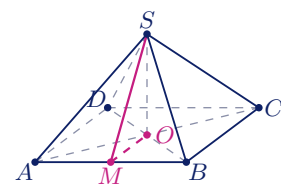


Figure 3 — La pyramide $SABCD$

- 4.1** Déterminer les coordonnées de O et de M , puis démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan de la base.
- 4.2** Calculer la longueur d'une arête latérale et le volume de la pyramide.
- 4.3** Démontrer que $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et calculer MS . En déduire l'aire du triangle SAB .
- 4.4** Calculer une mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle $\widehat{SMO}$: c'est l'angle que la face SAB forme avec la base.
- 4.5** Calculer le volume du tétraèdre $OABS$, puis en déduire la distance du point O au plan (SAB) .
- 4.6** Déterminer une mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle que l'arête $[SA]$ forme avec la base, c'est-à-dire de l'angle $\widehat{SAO}$.

Exercice 5 Deux arêtes opposées orthogonales



$ABCD$ est un tétraèdre quelconque tel que $AB = AC$ et $DB = DC$. On note I le milieu de $[BC]$.

- 5.1** En écrivant $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ et $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, démontrer que $\vec{AI} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2)$, puis que $\vec{AI} \cdot \vec{BC} = 0$.
- 5.2** Démontrer de même que $\vec{DI} \cdot \vec{BC} = 0$.
- 5.3** En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADI) , puis que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.
- 5.4** *Application numérique.* Dans un repère orthonormé, on donne $A(0;0;4)$, $B(3;0;0)$, $C(0;3;0)$ et $D(1;1;-2)$. Vérifier que ce tétraèdre satisfait bien les hypothèses de l'énoncé, puis contrôler par un calcul de produit scalaire que $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$.

Exercice 6 Un pavé droit



$ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $AB = 8$, $AD = 6$ et $AE = 5$, les sommets étant disposés comme dans le cube de l'exercice 2. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{8}\vec{AB}, \frac{1}{6}\vec{AD}, \frac{1}{5}\vec{AE})$.

- 6.1** Donner les coordonnées des sommets B , C , D , E et G , puis calculer la longueur exacte de la diagonale $[AG]$.
- 6.2** Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$. Les diagonales de la base sont-elles perpendiculaires ? Comparer avec le cas d'un cube.
- 6.3** Calculer une mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle $\widehat{GAC}$ que la diagonale $[AG]$ forme avec le plan de la base.
- 6.4** Soit H' le projeté orthogonal de E sur la droite (AG) . Démontrer qu'il existe un réel t tel que $\vec{AH'} = t\vec{AG}$, déterminer t , puis calculer la distance exacte du point E à la droite (AG) .
- 6.5** Calculer le volume du pavé, puis celui du tétraèdre $ABDE$. Quelle fraction du pavé ce tétraèdre représente-t-il ?

Exercice 7 Le panneau solaire et le drone



Un panneau solaire rectangulaire $ABCD$ est installé sur une terrasse horizontale. L'espace est muni d'un repère orthonormé d'unité 1 m, dans lequel le plan de la terrasse est le plan horizontal passant par A et

$$A(0;0;0), \quad B(6;0;0), \quad C(6;4;3), \quad D(0;4;3).$$

Un drone d'inspection se trouve au point $M(3;1;7)$ (figure 4).

- 7.1** Démontrer que $ABCD$ est un rectangle et calculer son aire.
- 7.2** Démontrer que $\vec{n}(0;3;-4)$ est un vecteur normal au plan (ABC) du panneau.
- 7.3** L'inclinaison du panneau est l'angle que le vecteur $\vec{AD}$ forme avec sa projection horizontale $\vec{h}(0;4;0)$. Calculer cette inclinaison, arrondie au dixième de degré.
- 7.4** Soit $H(3;4;3)$. Vérifier que $\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}$: le point H appartient donc au panneau. Vérifier ensuite que $\vec{MH} = \vec{n}$.
- 7.5** En déduire que H est le projeté orthogonal de M sur le plan du panneau, puis la distance du drone à ce plan.
- 7.6** Calculer MC et vérifier que $MC > MH$. Quelle propriété du projeté orthogonal ce calcul illustre-t-il ?

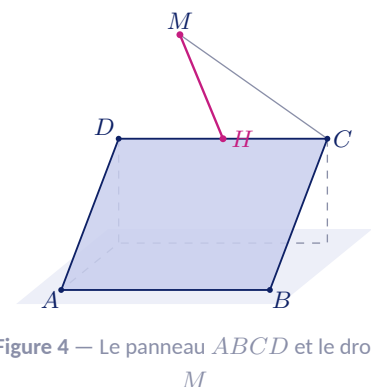


Figure 4 — Le panneau $ABCD$ et le drone M