

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 13



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Orthogonalité et distances dans l'espace

Vrai/Faux justifié, tétraèdre trirectangle, orthogonalité dans un cube, problème du hangar

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Sauf mention contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormé. Toute affirmation doit être justifiée : coordonnées des vecteurs, calcul du produit scalaire, théorème invoqué. Les longueurs, aires et volumes seront donnés sous forme exacte, les angles arrondis au dixième de degré. Le dernier exercice demande une part d'initiative : toute démarche, même partielle, sera valorisée. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chacune des quatre affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse **en justifiant** : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple explicite si elle est fausse.

- 1.1 Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, alors $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
- 1.2 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- 1.3 Si une droite d est orthogonale à une droite contenue dans un plan $\mathcal{P}$, alors d est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
- 1.4 Le vecteur $\vec{n}(1; 2; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) , où $A(1; 0; 0)$, $B(3; 0; 2)$ et $C(1; 1; 2)$.

Exercice 2 Un tétraèdre trirectangle

6 pts ●●○

On considère les points $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$ et $D(0; 0; 6)$.

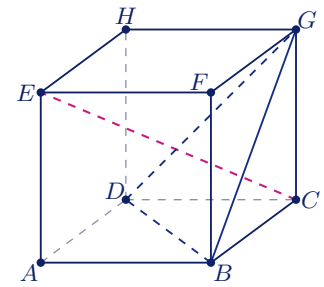
- 2.1 Démontrer que les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ sont deux à deux orthogonales, puis que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) .
- 2.2 Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
- 2.3 Calculer les longueurs exactes BC , BD et CD .
- 2.4 Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$, puis la valeur exacte de $\cos \widehat{CBD}$. En déduire $\sin \widehat{CBD}$, puis démontrer que l'aire du triangle BCD vaut exactement 14.
- 2.5 En utilisant les questions 2.2 et 2.4, déterminer la distance du point A au plan (BCD) .
- 2.6 Déterminer les réels a et b pour que le vecteur $\vec{n}(a; b; 2)$ soit un vecteur normal au plan (BCD) , puis calculer $\|\vec{n}\|$.

Exercice 3 Une diagonale orthogonale à un plan

5 pts ●●●

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2 (figure 1). On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$.

- 3.1 Donner les coordonnées des huit sommets du cube.
- 3.2 Démontrer que la droite (CE) est orthogonale au plan (BDG) .
- 3.3 Démontrer que le triangle BDG est équilatéral et calculer son aire exacte.
- 3.4 Calculer le volume du tétraèdre $CB DG$, puis en déduire la distance du point C au plan (BDG) .
- 3.5 Le projeté orthogonal L de C sur le plan (BDG) vérifie $\overrightarrow{CL} = t\overrightarrow{CE}$ pour un certain réel t . Déterminer t à l'aide de la question précédente (on vérifiera que le point obtenu appartient au plan (BDG)), puis les coordonnées de L .
- 3.6 Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ECG}$.

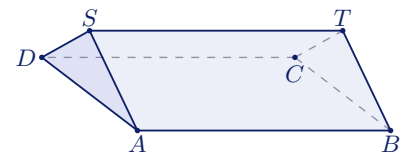
Figure 1 — Le cube et le triangle BDG

Exercice 4 Le hangar

5 pts ●●●

Un hangar agricole a pour base le rectangle horizontal $ABCD$ et pour faîtage le segment $[ST]$, situé à la verticale de la ligne médiane de la base (figure 2). L'espace est muni d'un repère orthonormé d'unité 1 m dans lequel

$$A(0; 0; 0), B(12; 0; 0), C(12; 8; 0), D(0; 8; 0), \\ S(0; 4; 3) \text{ et } T(12; 4; 3).$$

Figure 2 — Le hangar $ABCD-ST$

- 4.1 Démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ST}$: le quadrilatère $ABTS$, qui forme l'un des deux pans du toit, est donc un parallélogramme. Démontrer qu'il s'agit en fait d'un rectangle et calculer l'aire totale du toit.
- 4.2 Déterminer un vecteur normal au plan (ABS) du pan de toit.
- 4.3 L'inclinaison du toit est l'angle que le vecteur $\overrightarrow{AS}$ forme avec le vecteur horizontal $\overrightarrow{AD}$. Calculer cette inclinaison.
- 4.4 Calculer le volume du tétraèdre $ABDS$ de deux façons, puis en déduire la distance du point D au plan (ABS) . (Toute démarche sera valorisée.)
- 4.5 Le hangar est le prisme droit de base le triangle ADS et de longueur 12 m. Calculer son volume.
- 4.6 Le propriétaire veut repeindre les deux pans du toit ; un litre de peinture couvre 8 m^2 . Combien de litres doit-il prévoir ?