

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 13



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle A Orthogonalité et distances dans l'espace

QCM, triangle rectangle et vecteur normal, orthogonalité dans un cube, plan médiateur

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Sauf mention contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormé. Toute réponse doit être justifiée : on écrira les coordonnées des vecteurs utilisés et le calcul du produit scalaire avant de conclure. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification. Les longueurs et les aires seront données sous forme exacte, les angles arrondis au dixième de degré. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(1; -2; 2)$ et $\vec{v}(2; 3; 2)$ est égal à :
 a) 0 b) 4 c) 8 d) 12
- 1.2** La norme du vecteur $\vec{u}(2; -3; 6)$ est égale à :
 a) $\sqrt{11}$ b) 7 c) 11 d) 49
- 1.3** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ est égal à :
 a) 13 b) $\sqrt{15}$ c) 15 d) 19
- 1.4** La distance entre les points $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 4; 2)$ est égale à :
 a) 6 b) $4\sqrt{5}$ c) 20 d) $2\sqrt{5}$
- 1.5** $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, $[AG]$ étant une grande diagonale (figure 1). Le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ est égal à :
 a) 1 b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) 3

Exercice 2 Un triangle rectangle et son plan

5 pts ●●○○

On considère les points $A(1; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(2; -1; 3)$ et $D(2; -1; 0)$.

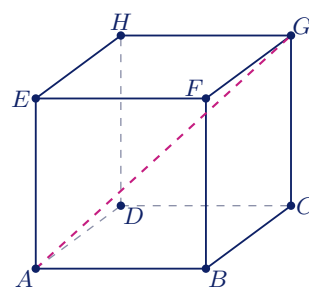
- 2.1** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .
- 2.2** Calculer les longueurs AB et AC , puis l'aire exacte du triangle ABC .
- 2.3** Calculer BC et vérifier la relation de Pythagore dans le triangle ABC .
- 2.4** Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1; -1; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- 2.5** Démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) . En déduire le projeté orthogonal de D sur (ABC) , puis la distance du point D à ce plan.
- 2.6** Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 3 Orthogonalité dans un cube

5 pts ●●○

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3 (figure 1). On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$.

- 3.1 Donner les coordonnées des sommets B, D, E, F et G .
- 3.2 Calculer $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- 3.3 En déduire que la droite (BE) est orthogonale au plan (ADF) , en précisant le théorème utilisé.
- 3.4 En déduire que les droites (BE) et (DF) sont orthogonales, puis vérifier ce résultat par un calcul de produit scalaire.
- 3.5 Calculer la valeur exacte de $\cos \widehat{FAG}$, puis une mesure de cet angle.
- 3.6 Soit H' le projeté orthogonal de B sur la droite (AG) . Démontrer que $\overrightarrow{AH'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$, puis calculer la distance exacte du point B à la droite (AG) .

Figure 1 — Le cube $ABCDEFGH$ **Exercice 4 Polarisation et plan médiateur**

5 pts ●●○

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$.

- 4.1 Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.
- 4.2 Vérifier sur cet exemple l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$, puis démontrer cette égalité pour deux vecteurs quelconques.

Partie B

On considère les points $A(2; -1; 3)$ et $B(6; 3; 1)$. Le plan médiateur $\mathcal{M}$ de $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $MA = MB$; on rappelle que $\mathcal{M}$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

- 4.3 Calculer AB et déterminer les coordonnées de I .
- 4.4 Le point $P(5; -1; 0)$ appartient-il à $\mathcal{M}$? Justifier par un produit scalaire, puis vérifier la réponse en calculant PA et PB .
- 4.5 Le point $Q(3; 0; 5)$ appartient-il à $\mathcal{M}$? Justifier.
- 4.6 Quel est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{M}$? En déduire la distance du point A au plan $\mathcal{M}$.
- 4.7 Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{M}$ dont l'ordonnée vaut 3 et la cote vaut 2.