

Approfondissement

Orthogonalité et distances dans l'espace

Pour aller plus loin : les démonstrations du cours, tétraèdre orthocentrique, trinôme et Cauchy-Schwarz, lieux de points, sections et tétraèdres remarquables du cube

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · calculatrice autorisée

Exercice 1 La démonstration du cours : le projeté réalise la distance ●●●

Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et M un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$. On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, c'est-à-dire le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$.

- 1.1 Soit N un point quelconque de $\mathcal{P}$. Justifier que $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} = 0$.
- 1.2 En écrivant $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}$, démontrer que $MN^2 = MH^2 + HN^2$.
- 1.3 En déduire que $MN \geq MH$ pour tout point N de $\mathcal{P}$, et que l'égalité a lieu si et seulement si $N = H$.
Conclusion : le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M , et $d(M, \mathcal{P}) = MH$.
- 1.4 Énoncer puis démontrer le résultat analogue pour une droite d de l'espace.
- 1.5 Application. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 ($ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, E étant au-dessus de A). Justifier que A est le projeté orthogonal de E sur le plan (ABC) , puis démontrer que $EN \geq 4$ pour tout point N de la face $ABCD$. Déterminer enfin le point de cette face le plus éloigné de E et la distance correspondante.

Exercice 2 Le théorème de la droite orthogonale à un plan ●●●

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul tel que $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$.

- 2.1 Rappeler pourquoi tout vecteur $\vec{p}$ dont la direction est contenue dans $\mathcal{P}$ s'écrit $\vec{p} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec x et y réels.
- 2.2 Démontrer, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire, que $\vec{w} \cdot \vec{p} = 0$. Conclure : une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à ce plan.
- 2.3 Donner un contre-exemple explicite montrant que l'hypothèse « deux droites sécantes » ne peut pas être remplacée par « deux droites parallèles ».
- 2.4 Application. Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A(1; 1; 0)$ et dirigé par $\vec{u}(2; -1; 1)$ et $\vec{v}(0; 1; 3)$. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, puis déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}$ dont la troisième coordonnée vaut 1.

Exercice 3 Le tétraèdre orthocentrique ●●●

$ABCD$ est un tétraèdre quelconque de l'espace.

- 3.1 En écrivant $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, démontrer l'identité

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

- 3.2 En déduire que si deux couples d'arêtes opposées sont orthogonaux, alors le troisième l'est aussi. Un tel tétraèdre est dit *orthocentrique*.
- 3.3 Démontrer que $AB^2 + CD^2 - AC^2 - BD^2 = 2 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$. En déduire qu'un tétraèdre est orthocentrique si et seulement si $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

- 3.4 Application.** Dans un repère orthonormé, on donne $A(0; 0; 0)$, $B(6; 0; 0)$, $C(2; 4; 0)$ et $D(2; 2; 5)$. Vérifier que $(AB) \perp (CD)$ et $(AC) \perp (BD)$, en déduire sans nouveau produit scalaire que $(AD) \perp (BC)$, puis contrôler la propriété de la question 3.3 en calculant les six carrés de longueurs.

Exercice 4 Un trinôme pour la distance, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz



Soient d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul, et M un point de l'espace. Pour tout réel t , on note M_t le point défini par $\overrightarrow{AM_t} = t\vec{u}$.

- 4.1** Démontrer que $f(t) = MM_t^2 = \|\vec{u}\|^2 t^2 - 2(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})t + AM^2$.
- 4.2** Justifier que f est un trinôme du second degré de coefficient dominant strictement positif, puis déterminer le réel t_0 pour lequel f atteint son minimum et la valeur de ce minimum.
- 4.3** Interpréter géométriquement : que représente le point M_{t_0} ? En déduire la formule

$$d(M, d)^2 = AM^2 - \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})^2}{\|\vec{u}\|^2}.$$

- 4.4 Application.** Dans un repère orthonormé, $A(1; 2; 0)$, $\vec{u}(2; 1; 2)$ et $M(1; 5; 3)$. Calculer t_0 , les coordonnées du projeté orthogonal de M sur d et la distance de M à d .
- 4.5 (Hors programme — pour aller plus loin.)** Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs, $\vec{b}$ non nul. En appliquant le raisonnement précédent au trinôme $g(t) = \|\vec{a} + t\vec{b}\|^2$, qui est positif ou nul pour tout t , démontrer que son discriminant est négatif ou nul, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\|$. En déduire l'inégalité triangulaire $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

Exercice 5 Formule de la médiane et lieux de points



A et B sont deux points distincts de l'espace et I est le milieu de $[AB]$.

- 5.1** En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, démontrer la *formule de la médiane* : pour tout point M ,

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

- 5.2** Démontrer de même que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$. Retrouver ainsi la caractérisation du plan médiateur de $[AB]$.
- 5.3** Soit k un réel. Discuter, selon k , la nature de l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ (on obtiendra une sphère, un point, ou l'ensemble vide).
- 5.4** Soit k un réel et J le point de la droite (AB) défini par $\overrightarrow{IJ} = \frac{k}{2AB^2} \overrightarrow{AB}$. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$ est le plan passant par J et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
- 5.5 Application.** Dans un repère orthonormé, $A(1; 0; 2)$ et $B(5; 4; 2)$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 40$, puis de l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 16$.

Exercice 6 La section hexagonale du cube



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{6}\overrightarrow{AE})$ et on note Ω le centre du cube.

- 6.1 Donner les coordonnées de Ω et démontrer que Ω est équidistant des huit sommets du cube. Calculer cette distance.
- 6.2 Calculer la valeur exacte du cosinus de l'angle aigu formé par les grandes diagonales (AG) et (BH) , puis une mesure de cet angle arrondie au dixième de degré.
- 6.3 Soit H' le projeté orthogonal de B sur la droite (AG) . Déterminer les coordonnées de H' et la distance du point B à la droite (AG) .
- 6.4 On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des six arêtes $[BC]$, $[BF]$, $[EF]$, $[EH]$, $[DH]$ et $[DC]$: ce sont les arêtes qui ne passent ni par A ni par G (figure 1). Démontrer que $\overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$, puis que les six points appartiennent au plan passant par Ω et orthogonal à (AG) .
- 6.5 Démontrer que $\Omega I = \Omega J = \dots = \Omega N = 3\sqrt{2}$, puis que $IJ = JK = \dots = NI = 3\sqrt{2}$. Quelle est la nature du polygone $IJKLMN$? Calculer son aire.

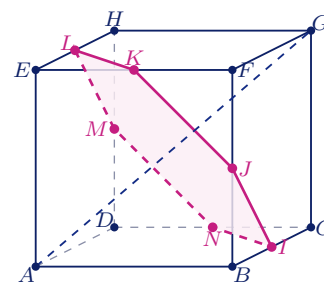


Figure 1 — La section $IJKLMN$

Exercice 7 Le tétraèdre régulier caché dans le cube, et l'angle du méthane



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2, muni du repère orthonormé $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. On s'intéresse au tétraèdre $ACFH$ formé par quatre sommets du cube (figure 2) et on note Ω le centre du cube.

- 7.1 Donner les coordonnées de A, C, F, H et Ω .
- 7.2 Démontrer que les six arêtes du tétraèdre $ACFH$ ont la même longueur : ce tétraèdre est donc régulier.
- 7.3 Démontrer que Ω est équidistant des quatre sommets A, C, F et H : c'est le centre du tétraèdre régulier.
- 7.4 Calculer $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega C}$, puis la valeur exacte de $\cos \widehat{A\Omega C}$ et une mesure de cet angle arrondie au centième de degré. *En chimie, c'est l'angle que forment deux liaisons C—H dans la molécule de méthane, dont les quatre atomes d'hydrogène occupent les sommets d'un tétraèdre régulier centré sur l'atome de carbone.*
- 7.5 Soit I le milieu de l'arête $[FH]$. Démontrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$ et $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$, puis calculer $\cos \widehat{AIC}$: c'est l'angle dièdre du tétraèdre régulier, c'est-à-dire l'angle formé par deux de ses faces.
- 7.6 Le tétraèdre $ACFH$ s'obtient en retirant au cube quatre tétraèdres trirectangles superposables, par exemple $BACF$. Calculer le volume de l'un d'eux, puis en déduire le volume du tétraèdre $ACFH$ et la fraction du cube qu'il occupe.

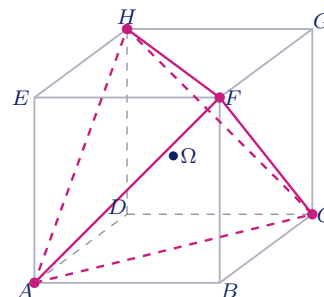


Figure 2 — Le tétraèdre régulier $ACFH$