

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 2

Sujet type bac Limites de suitesSuite $u_{n+1} = f(u_n)$, convergence, suite auxiliaire géométrique, seuil — QCM

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte dans la notation. Les limites de fonctions ne sont pas utilisées dans ce sujet.

Exercice 1 La diffusion d'une innovation agricole

7 pts ●●●○

Une chambre d'agriculture suit la diffusion d'une nouvelle technique d'irrigation dans un département. En 2027, 20 % des exploitations l'ont adoptée. On note u_n la proportion d'exploitations ayant adopté la technique en 2027 + n , exprimée sous forme décimale ; ainsi $u_0 = 0,2$.

Les agronomes modélisent cette diffusion par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

Partie A — Étude de la fonction associée

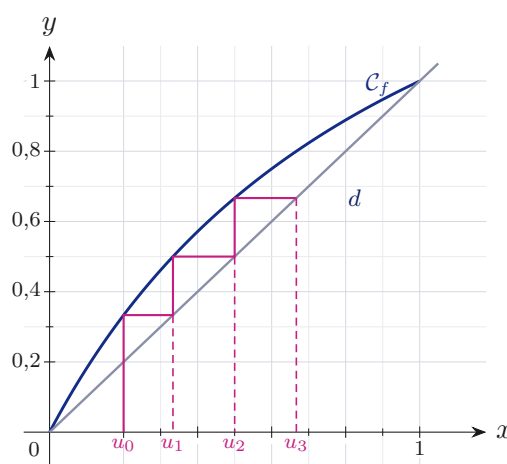
Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1.1 Montrer que, pour tout réel x de $[0; 1]$, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f sur $[0; 1]$.

1.2 Résoudre dans $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

1.3 Sur la figure 1, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d d'équation $y = x$, puis construit sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 .

- Expliquer comment le terme u_1 a été construit à partir de u_0 .
- Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur un majorant de cette suite ?

Figure 1 — Construction des premiers termes de (u_n) **Partie B — Étude de la suite (u_n)**

1.4 Calculer u_1 et u_2 : on donnera les valeurs exactes sous forme de fractions irréductibles, puis les valeurs arrondies à 10^{-3} . Interpréter la valeur de u_2 dans le contexte de l'exercice.

1.5 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0,2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

1.6 En déduire que la suite (u_n) converge. Énoncer le théorème utilisé.

Partie C — Expression de u_n et recherche d'un seuil

D'après la partie B, tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs. Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1.$$

- 1.7** Calculer v_0 , puis démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- 1.8** Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
- 1.9** Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice. La technique sera-t-elle adoptée par toutes les exploitations au bout d'un nombre fini d'années ?
- 1.10** On souhaite déterminer l'année à partir de laquelle au moins 90 % des exploitations auront adopté la technique. On a écrit pour cela la fonction Python `seuil` ci-dessous.

```

1 def seuil(S):
2     n = 0
3     u = 0.2
4     while u < S:
5         u = ...
6         n = ...
7     return n

```

- a) Recopier et compléter les lignes 5 et 6 de cette fonction.
- b) Déterminer la valeur renvoyée par l'appel `seuil(0.9)`. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- c) Expliquer pourquoi l'appel `seuil(1)` ne renvoie aucun résultat.

Exercice 2 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre choisie.

- 2.1** La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \frac{2n^2 - 5n}{3 - 4n^2}$. Sa limite est :
- a) 0 b) $-\infty$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$
- 2.2** La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{3^n - 5^n}{5^n}$. On peut affirmer que :
- a) (v_n) converge vers 0. b) (v_n) a pour limite $-\infty$.
- c) (v_n) n'a pas de limite. d) (v_n) converge vers -1 .
- 2.3** Soit (w_n) une suite telle que, pour tout entier $n \geq 1$, $3 - \frac{2}{n} \leq w_n \leq 3 + \frac{1}{n^2}$. On peut affirmer que :
- a) (w_n) est croissante. b) (w_n) converge vers 3.
- c) (w_n) est majorée par 3. d) on ne peut rien conclure.
- 2.4** Soit (t_n) la suite définie par $t_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = 0,6t_n + 2$. La suite (t_n) :
- a) est décroissante et converge vers 5. b) est croissante et converge vers 5.
- c) est décroissante et converge vers 0. d) a pour limite $+\infty$.
- 2.5** On considère la fonction Python ci-dessous, dans laquelle S désigne un réel strictement positif.

```

1 def mystere(S):
2     n = 0
3     u = 1000
4     while u > S:
5         u = 0.5 * u
6         n = n + 1
7     return n

```

L'appel `mystere(30)` renvoie :

- a) 5 b) 6 c) 9 d) 10