

Fiche de cours Limites de suites

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 DÉFINITIONS

Définition — limite infinie. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ signifie que tout intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle $] -\infty; A]$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Définition — limite finie. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. La suite est alors dite **convergente** (vers ℓ) ; sa limite est unique.

Notation. Une suite qui n'est pas convergente est **divergente** : soit elle a une limite infinie, soit elle n'a pas de limite du tout, comme $((-1)^n)$, dont les termes valent alternativement 1 et -1 .

2 LIMITES USUELLES ET OPÉRATIONS

■ FORMULAIRE — limites de référence et formes indéterminées

- $\lim n = \lim n^2 = \lim n^3 = \lim \sqrt{n} = +\infty$; $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- **Somme, produit, quotient** : les limites s'ajoutent, se multiplient, se divisent, *sauf* dans les quatre cas indéterminés $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$.
- Si $\lim u_n = \ell \neq 0$ et $\lim v_n = 0$ avec $v_n > 0$, alors $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ si $\ell > 0$, $-\infty$ si $\ell < 0$.

Méthode — lever une indétermination. Factoriser le **terme prépondérant** : la plus grande puissance de n au numérateur et au dénominateur, ou la suite géométrique de plus grande raison ; simplifier, puis appliquer les opérations.

3 THÉORÈMES DE COMPARAISON

Théorème — comparaison. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors : $\lim u_n = +\infty$ entraîne $\lim v_n = +\infty$; $\lim v_n = -\infty$ entraîne $\lim u_n = -\infty$.

Théorème — théorème des gendarmes. Si $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim u_n = \lim v_n = \ell$, alors (w_n) converge et $\lim w_n = \ell$.

Remarque. On l'utilise dès qu'apparaît un terme borné : $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donnent l'encadrement de départ.

4 LA SUITE GÉOMÉTRIQUE (q^n)

Propriété. Soit q un réel. Si $q > 1$: $\lim q^n = +\infty$. Si $q = 1$: $\lim q^n = 1$. Si $-1 < q < 1$: $\lim q^n = 0$. Si $q \leq -1$: la suite (q^n) n'a pas de limite.

Idée de la démonstration pour $q > 1$. On écrit $q = 1 + a$ avec $a > 0$; l'inégalité de Bernoulli donne $q^n \geq 1 + na$, qui tend vers $+\infty$: on conclut par comparaison.

Propriété — somme des termes. Pour $q \neq 1$: $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, de limite $\frac{1}{1 - q}$ si $-1 < q < 1$.

5 SUITES MONOTONES

Théorème — convergence monotone, admis. Toute suite **croissante et majorée** converge ; toute suite **décroissante et minorée** converge.

Théorème. Toute suite croissante et *non* majorée tend vers $+\infty$. Ainsi une suite croissante est soit convergente, soit de limite $+\infty$.

Remarque. Le théorème donne l'existence de la limite, pas sa valeur : si $u_n \leq M$ pour tout n , alors $\ell \leq M$, mais ℓ n'est en général pas égal à M .

6 SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Méthode — suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$. Résoudre $c = ac + b$, soit $c = \frac{b}{1-a}$. Poser $v_n = u_n - c$: la suite (v_n) est **géométrique de raison a** , donc $v_n = (u_0 - c)a^n$, puis $u_n = (u_0 - c)a^n + c$. Si $-1 < a < 1$, la suite (u_n) converge vers c .

Méthode — algorithme de seuil. Pour le plus petit rang n tel que $u_n \geq A$: $n = 0$; $u = u_0$; while $u < A$: on remplace u par le terme suivant et on incrémente n . Si $\lim u_n = +\infty$, la boucle se termine ; si tous les termes restent inférieurs à A (suite croissante de limite $\ell \leq A$, par exemple), elle ne s'arrête jamais.

7 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Utiliser la définition pour déterminer un rang à partir duquel u_n appartient à un intervalle donné.
- Déterminer une limite par les limites usuelles et les opérations ; reconnaître une forme indéterminée et la lever en factorisant le terme prépondérant.
- Appliquer le théorème de comparaison ou celui des gendarmes à partir d'un encadrement.
- Donner la limite de q^n et d'une somme de termes d'une suite géométrique ; traiter une évolution en pourcentage.
- Montrer qu'une suite est croissante et majorée (souvent par récurrence) pour en déduire qu'elle converge.
- Étudier une suite $u_{n+1} = au_n + b$ à l'aide d'une suite auxiliaire géométrique ; écrire et exploiter un algorithme de seuil.

8 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — quotient : forme $\frac{\infty}{\infty}$

$u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 5}$. On factorise par n^2 : $u_n = \frac{n^2(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{5}{n^2})} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}}$. Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 1 : $\lim u_n = 3$.

★ EXEMPLE — différence : forme $\infty - \infty$

$v_n = n^2 - 5n - 2 = n^2(1 - \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2})$. Comme $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim(1 - \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}) = 1 > 0$, on obtient $\lim v_n = +\infty$.

★ EXEMPLE — théorème des gendarmes

$w_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$. Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, on a $-\frac{1}{n} \leq w_n \leq \frac{1}{n}$. Or $\lim(-\frac{1}{n}) = \lim \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim w_n = 0$.

★ EXEMPLE — suite arithmético-géométrique

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$. Le point fixe vérifie $c = 0,8c + 1$, soit $c = 5$. On pose $v_n = u_n - 5$: $v_{n+1} = 0,8u_n + 1 - 5 = 0,8(u_n - 5) = 0,8v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = -3$: $u_n = 5 - 3 \times 0,8^n$. Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim u_n = 5$.

✗ PIÈGES

- « À partir d'un certain rang » est essentiel : les premiers termes n'ont aucune influence sur la limite.
- Une suite majorée n'est pas forcément convergente : il faut aussi la monotonie ($((-1)^n)$ est bornée sans limite).
- $(+\infty) + (-\infty)$ et $\frac{\infty}{\infty}$ ne valent ni 0 ni 1 : ce sont des formes indéterminées, il faut factoriser.
- Une suite croissante qui converge vers ℓ vérifie $u_n \leq \ell$: la limite ne peut pas être dépassée, même « à la fin ».
- Pour $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite : ne pas écrire $\lim(-2)^n = +\infty$.