

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 2



R. RINGUET · 2026 – 2027

# Exercices 2 Limites de suites

Problèmes : modéliser une évolution, encadrer, converger, chercher un seuil

8 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

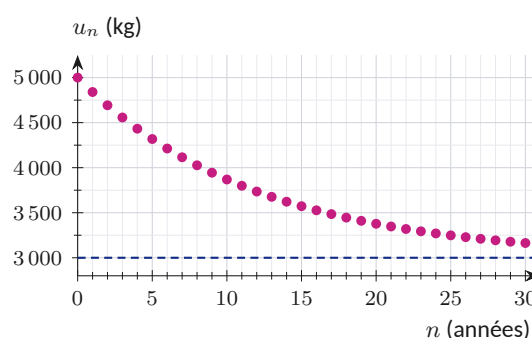
## ★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser une évolution par une suite arithmético-géométrique, introduire la suite auxiliaire géométrique et en déduire l'expression puis la limite du terme général.
- Étudier une suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  : conjecturer sur un graphique, démontrer par récurrence, conclure avec le théorème de la suite croissante majorée.
- Encadrer pour conclure (gendarmes, minoration), lever une indétermination avec la quantité conjuguée, écrire et exploiter un algorithme de seuil.

## Exercice 1 La station d'épuration

●●○

Un bassin de décantation contient 5 000 kg de boues au 1<sup>er</sup> janvier 2027. Chaque année, la station élimine 8 % des boues présentes dans le bassin, mais 240 kg de boues nouvelles s'y déposent. On note  $u_n$  la masse de boues, en kilogrammes, au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2027 +  $n$ ; ainsi  $u_0 = 5 000$ .

Figure 1 — Points de coordonnées  $(n ; u_n)$ 

- 1.1** Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,92 u_n + 240$ .
- 1.2** À l'aide de la figure 1, conjecturer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et sa limite.
- 1.3** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_n - 3 000$ .
- Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,92 et préciser  $v_0$ .
  - En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3 000 + 2 000 \times 0,92^n$ .
  - Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  et interpréter ce résultat pour la station.
- 1.4** Retrouver par le calcul le sens de variation de la suite  $(u_n)$  conjecturé à la question 1.2.
- 1.5** Le bassin est considéré comme correctement entretenu lorsque la masse de boues est inférieure à 3 200 kg. Écrire une fonction Python `annee()` sans argument qui renvoie le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n < 3 200$ , puis déterminer l'année à partir de laquelle ce seuil est atteint.

## Exercice 2 Encadrer pour conclure

●●○

- 2.1** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$  (somme de  $n$  termes).
- Calculer  $S_1$  et  $S_2$  (valeurs exactes).
  - Justifier que, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ ,  $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$ .
  - En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\frac{n}{n^2+n} \leq S_n \leq \frac{n}{n^2+1}$ , puis déterminer la limite de  $(S_n)$ .
- 2.2** Soit  $(w_n)$  la suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $w_n = \frac{4n^2 + 3 \cos n}{n^2 + 1}$ . Encadrer  $w_n$ , puis déterminer sa limite.

### Exercice 3 Une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{3x}$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 3.1 Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ , arrondis à  $10^{-3}$ .
- 3.2 Résoudre dans  $[0; +\infty[$  l'équation  $f(x) = x$ . Que représentent les solutions sur la figure 2 ?
- 3.3 Sur la figure 2, on a construit les termes  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  sur l'axe des abscisses. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de  $(u_n)$  et sur un majorant de cette suite ?
- 3.4 La fonction racine carrée étant croissante sur  $[0; +\infty[$ , démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ .
- 3.5 En déduire que la suite  $(u_n)$  converge; on note  $\ell$  sa limite. En admettant que la suite  $(u_{n+1})$  a aussi pour limite  $\ell$ , utiliser l'égalité  $u_{n+1}^2 = 3u_n$  pour déterminer  $\ell$ .

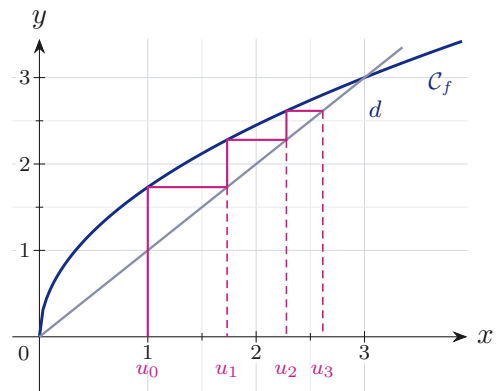


Figure 2 — Courbe  $C_f$ , droite  $d$  d'équation  $y = x$  et premiers termes

### Exercice 4 La quantité conjuguée



Pour tout réel  $a \geq 0$  et tout réel  $b \geq 0$ , on a  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ .

- 4.1 Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .
  - a) Quelle est la forme indéterminée rencontrée ? Calculer  $u_0, u_{100}$  et  $u_{10000}$ , arrondis à  $10^{-3}$ .
  - b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ , puis déterminer la limite de  $(u_n)$ .
- 4.2 Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$ . Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_n = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}$ , puis déterminer la limite de  $(v_n)$ . Déterminer de même la limite de la suite  $(t_n)$  définie par  $t_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n+2}$ .

### Exercice 5 La balle qui rebondit



On lâche une balle d'une hauteur  $h = 1,5$  m au-dessus du sol. À chaque rebond, elle remonte à 70 % de la hauteur d'où elle vient de retomber (la hauteur  $h$  du lâcher pour le premier rebond, figure 3). Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $h_n$  la hauteur, en mètres, atteinte après le  $n$ -ième rebond, et  $d_n$  la distance totale, en mètres, parcourue par la balle entre le lâcher et l'instant où elle retombe au sol après le  $n$ -ième rebond.

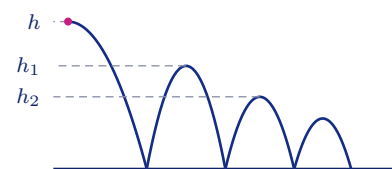


Figure 3 — Trajectoire de la balle

- 5.1 Exprimer  $h_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de la suite  $(h_n)$ .
- 5.2 Justifier que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $d_n = h + 2(h_1 + h_2 + \dots + h_n)$ , puis que  $d_n = 1,5 + 7(1 - 0,7^n)$ .
- 5.3 Déterminer la limite de la suite  $(d_n)$  : quelle distance totale la balle parcourt-elle « en théorie » ? Déterminer enfin le plus petit entier  $n$  tel que  $h_n < 1$  cm.

## Exercice 6 Croissance linéaire ou croissance exponentielle ?



Deux villes voisines comptent 40 000 habitants en 2027. La population de la ville A augmente de 1 100 habitants par an ; celle de la ville B augmente de 1,8 % par an. On note  $a_n$  et  $b_n$  les populations respectives en  $2027 + n$  ; ainsi  $a_0 = b_0 = 40\,000$ .

**6.1** Préciser la nature de chacune des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , puis exprimer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

**6.2** Déterminer les limites de  $(a_n)$  et de  $(b_n)$ .

```

1 def depassement():
2     n = 0
3     a = 40000
4     b = 40000
5     while b <= a:
6         n = n + 1
7         a = a + 1100
8         b = b * 1.018
9     return n

```

**6.3** On admet l'inégalité de Bernoulli :  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  pour tout réel  $x > 0$  et tout entier naturel  $n$ . En déduire que  $b_n \geq 40\,000 + 720n$  : cette minoration suffit-elle à démontrer que B dépasse un jour A ?

**6.4** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $r_n = \frac{b_n}{a_n}$ . Calculer  $r_{10}$ ,  $r_{30}$  et  $r_{60}$ , arrondis à  $10^{-3}$ . Que peut-on conjecturer ?

**6.5** Expliquer ce que renvoie la fonction Python depassement ci-dessus. Déterminer, à la calculatrice, la valeur renvoyée et l'année correspondante.

## Exercice 7 Le remboursement d'un prêt



Alice emprunte 12 000 euros pour acheter une camionnette. Le capital restant dû augmente de 0,5 % par mois (intérêts), puis Alice rembourse 400 euros à la fin de chaque mois. On note  $c_n$  le capital restant dû, en euros, au bout de  $n$  mois ; ainsi  $c_0 = 12\,000$ .

**7.1** Justifier que  $c_{n+1} = 1,005 c_n - 400$  pour tout entier naturel  $n$ , puis calculer  $c_1$  et  $c_2$ , arrondis à l'euro.

**7.2** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $w_n = c_n - 80\,000$ .

a) Démontrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison 1,005 et préciser  $w_0$ .

b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n = 80\,000 - 68\,000 \times 1,005^n$ .

**7.3** Déterminer la limite de la suite  $(c_n)$ . Cette limite a-t-elle un sens dans le contexte de l'exercice ? Expliquer.

**7.4** Le prêt est soldé le premier mois où le capital restant dû devient négatif ou nul. Déterminer le nombre de mensualités versées, puis le coût total du crédit (on négligera l'ajustement de la dernière mensualité).

**7.5** Alice aurait-elle pu rembourser son prêt avec une mensualité de 50 euros ? Justifier à l'aide de la relation de récurrence.

## Exercice 8 Vrai ou faux ?



Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, et le justifier (démonstration ou contre-exemple).

**8.1** « Toute suite croissante a pour limite  $+\infty$ . » Et réciproquement : « toute suite qui tend vers  $+\infty$  est croissante. »

**8.2** « Si une suite  $(u_n)$  converge vers 2, alors tous ses termes sont inférieurs ou égaux à 2. »

**8.3** « Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$ . »

**8.4** « Si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers 0. »