

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 2



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Limites de suites

Vrai ou faux, limite de q^n et Bernoulli, modèle d'évolution, suite auxiliaire

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Toute limite annoncée doit être justifiée. Dans les démonstrations par récurrence, la propriété $P(n)$ doit être clairement énoncée et les trois étapes doivent apparaître. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse : démonstration si l'affirmation est vraie, contre-exemple si elle est fausse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 Affirmation 1 :** « si une suite (u_n) est majorée par 7, alors elle converge ».
- 1.2 Affirmation 2 :** « si, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ».
- 1.3 Affirmation 3 :** « la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge vers 0 ».
- 1.4 Affirmation 4 :** « si (u_n) converge vers 3 et si (v_n) a pour limite $+\infty$, alors la suite de terme général $u_n v_n$ a pour limite $+\infty$ ».

Exercice 2 Démonstration de cours : la limite de q^n

5 pts ●●○

On admet l'inégalité de Bernoulli : pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$.

- 2.1** Soit q un réel strictement supérieur à 1. En posant $a = q - 1$, démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$. Préciser le théorème de comparaison utilisé.
- 2.2** Application : sans calculatrice, déterminer un entier n tel que $1,004^n \geq 10$.
- 2.3** Soit q un réel tel que $0 < q < 1$. On pose $Q = \frac{1}{q}$.
- a) Justifier que $Q > 1$, puis déterminer la limite de la suite (Q^n) .
- b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- 2.4** Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{4^n - 3 \times 2^n}{4^n + 1}$.

Exercice 3 Une déchetterie intercommunale

6 pts ●●●

Une déchetterie stocke des déchets verts. Au 1^{er} mars 2027, le stock est de 200 tonnes. Chaque mois, 25 % du stock est évacué vers une plateforme de compostage, puis 30 tonnes de déchets verts nouveaux sont déposées. On note u_n le stock, en tonnes, n mois après le 1^{er} mars 2027; ainsi $u_0 = 200$.

3.1 Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75 u_n + 30$.

3.2 Calculer u_1 et u_2 .

3.3 Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 120$.

a) Démontrer que (v_n) est géométrique de raison 0,75.

b) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

3.4 Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat pour la déchetterie.

3.5 La communauté de communes souhaite que le stock devienne inférieur à 125 tonnes. Déterminer, à la calculatrice, le plus petit entier n tel que $u_n < 125$, puis préciser la date correspondante.

3.6 Écrire une fonction Python stock(n) qui renvoie la valeur de u_n en utilisant uniquement la relation de récurrence de la question 3.1.

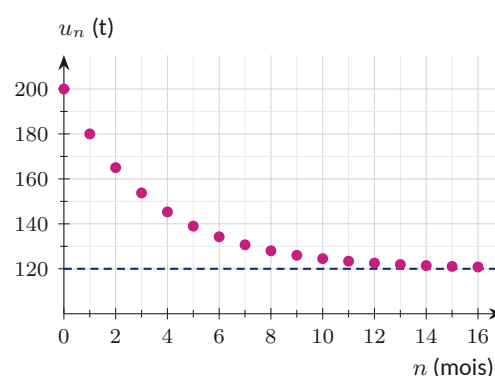


Figure 1 — Points de coordonnées $(n; u_n)$

Exercice 4 Une suite auxiliaire arithmétique

5 pts ●●●

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$.

4.1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.

4.2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

4.3 Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$ (ce qui est licite d'après la question précédente).

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{2n + 1}$.

4.4 Déterminer la limite de la suite (u_n) et le sens de variation de cette suite.

4.5 Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Justifier que la suite (S_n) est croissante, puis que, pour tout entier naturel n , $S_n \geq \frac{n+1}{2n+1}$. Ces deux résultats permettent-ils d'affirmer que la suite (S_n) converge? Justifier la réponse.