

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 2



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle A Limites de suites

Définitions, opérations et indéterminations, comparaison, suite arithmético-géométrique

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Toute limite annoncée doit être justifiée : limite usuelle, opération, théorème de comparaison, théorème des gendarmes ou limite de q^n . La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questions de cours et automatismes

5 pts ●○○○

- 1.1** Recopier et compléter la phrase suivante. « Dire que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme contient à partir d'un certain rang. »
- 1.2** Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4n - 9$. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq 1\,000$.
- 1.3** Donner, lorsqu'elle existe, la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier $n \geq 1$ (aucune justification n'est demandée pour cette question).
- a) $u_n = \frac{3}{\sqrt{n}}$ b) $u_n = 7 - n^2$ c) $u_n = 0,98^n$ d) $u_n = (-2)^n$
- e) $u_n = 1,6^n$ f) $u_n = 5 + \frac{2}{n}$ g) $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ h) $u_n = (-1)^n + 3$
- 1.4** Une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 250$ a pour limite 0. Que peut-on dire de sa raison q ? Donner deux valeurs possibles de q , l'une positive, l'autre négative.

Exercice 2 Indéterminations et comparaison

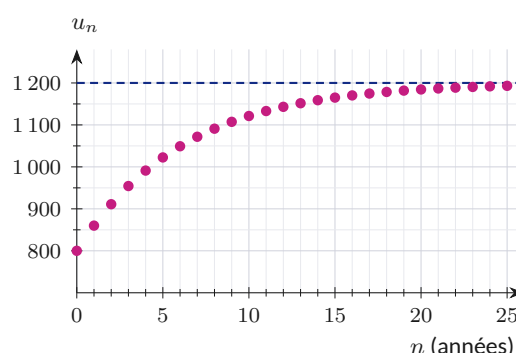
5 pts ●●○○

- 2.1** Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier $n \geq 1$. Pour chacune, préciser d'abord la forme indéterminée rencontrée, puis la méthode employée.
- a) $u_n = \frac{5n^2 + 3n}{n^2 - 2}$
- b) $v_n = \frac{2n + 1}{n^2 + 4}$
- c) $w_n = 3n - n^2$
- d) $t_n = \frac{7 \times 3^n + 2}{3^n - 4}$
- 2.2** Soit (a_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $a_n = \frac{2n + \sin n}{n}$. Démontrer, à l'aide du théorème des gendarmes, que la suite (a_n) converge et préciser sa limite. On rappelle que $-1 \leq \sin n \leq 1$ pour tout entier n .
- 2.3** Soit (b_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $b_n = n^2 + 5 \cos n$. Déterminer la limite de (b_n) en précisant le théorème utilisé.

Exercice 3 Les inscrits de la médiathèque

6 pts ●●○

Une médiathèque comptait 800 inscrits au 1^{er} septembre 2026. Chaque année, 15 % des inscrits ne renouvellent pas leur inscription et 180 nouvelles personnes s'inscrivent. On note u_n le nombre d'inscrits au 1^{er} septembre de l'année 2026 + n ; ainsi $u_0 = 800$.

Figure 1 — Points de coordonnées $(n; u_n)$

3.1 Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85 u_n + 180$.

3.2 Calculer u_1 et u_2 . À l'aide de la figure 1, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

3.3 Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 1\,200$.

- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85 et préciser son premier terme.
- En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1\,200 - 400 \times 0,85^n$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat.

3.4 Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3.5 La médiathèque devra recruter un agent supplémentaire dès que le nombre d'inscrits atteindra 1 150.

- Recopier et compléter les lignes 3 et 5 de la fonction Python ci-contre pour que l'appel `seuil(S)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq S$.
- Déterminer la valeur renvoyée par l'appel `seuil(1150)`, puis l'année du recrutement.
- Expliquer pourquoi l'appel `seuil(1250)` ne renverrait aucun résultat.

```
1 def seuil(S):
2     n = 0
3     u = ...
4     while u < S:
5         u = ...
6         n = n + 1
7     return n
```

Exercice 4 Une suite croissante et majorée

4 pts ●●○

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

On rappelle que la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

4.1 Calculer u_1 et u_2 , arrondis à 10^{-3} .

4.2 Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x + 6} = x$.

4.3 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

4.4 En déduire que la suite (u_n) converge. Énoncer précisément le théorème utilisé.

4.5 La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite 4? Justifier.