

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 3

Sujet type bac Limites de fonctions

Étude d'une fonction avec exponentielle en contexte — QCM

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : **/ 12**

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute limite doit être justifiée.

Exercice 1 Concentration d'un médicament dans le sang

7 pts ●●○

Un patient reçoit, à l'instant $t = 0$, une injection unique d'un médicament. On modélise la concentration du médicament dans le sang, exprimée en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, par $C(t) = f(t)$, où t est le temps écoulé depuis l'injection, exprimé en heures, et où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 8x e^{-0,5x}.$$

Partie A — Étude de la fonction f **1.1** Calculer $f(0)$.

1.2 Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = 16 \times \frac{0,5x}{e^{0,5x}}$. En posant $X = 0,5x$ et en utilisant une croissance comparée, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Quelle interprétation graphique peut-on en donner pour la courbe de f ?

1.3 Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = (8 - 4x) e^{-0,5x}$.

1.4 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations complet de f (limite comprise). On donnera la valeur exacte du maximum de f , puis sa valeur arrondie à 10^{-2} .

Partie B — Retour au contexte

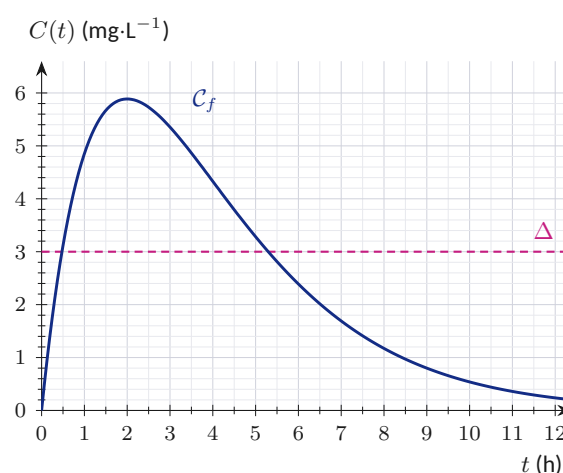
La figure 1 représente la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$, ainsi que la droite Δ d'équation $y = 3$.

1.5 À quel instant la concentration est-elle maximale ? Quelle est alors cette concentration, arrondie à 10^{-2} ?

1.6 Le médicament n'est efficace que lorsque la concentration est supérieure ou égale à $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

a) Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 1 de chacun des deux instants où la concentration vaut exactement $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

b) Par balayage à la calculatrice, déterminer chacun de ces deux instants à 0,1 heure près, puis en déduire la durée d'efficacité du médicament, à 0,1 heure près.

Figure 1 — Concentration $C(t)$ et droite Δ d'équation $y = 3$

- 1.7** Une seconde injection est pratiquée dès que la concentration redescend à $1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Déterminer, à 0,1 heure près, l'instant de cette seconde injection.
- 1.8** Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la limite obtenue à la question 1.2.

Partie C — Comparaison avec un second médicament

Pour un second médicament, la concentration dans le sang, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, est modélisée par $g(t) = 5t^2 e^{-t}$ pour $t \geq 0$.

- 1.9** Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$ en utilisant une croissance comparée.
- 1.10** On admet que, pour tout réel $t \geq 0$, $g'(t) = (10t - 5t^2) e^{-t}$. Dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$ et donner la valeur exacte du maximum de g , puis sa valeur arrondie à 10^{-2} .
- 1.11** Tracer l'allure de la courbe de g dans le repère ci-dessous, en plaçant son maximum.

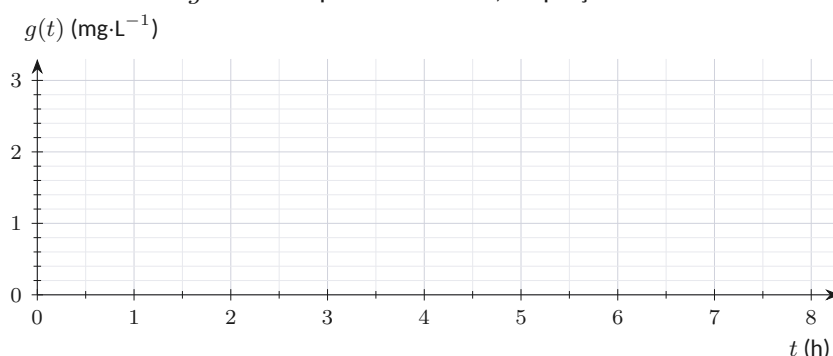


Figure 2 — Repère à compléter

- 1.12** Lequel des deux médicaments atteint la plus forte concentration ? Lequel est éliminé le plus rapidement ? On justifiera cette seconde réponse en comparant $C(10)$ et $g(10)$.

Exercice 2 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 2.1** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{1 - 2x^2}$ est égale à :
- a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) 2 d) $-\infty$
- 2.2** $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{3 - x}$ est égale à :
- a) 6 b) 0 c) $+\infty$ d) $-\infty$
- 2.3** La courbe de la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ admet :
- a) les asymptotes d'équations $y = 2$ et $x = 1$ b) les asymptotes d'équations $x = 2$ et $y = -0,5$
c) aucune asymptote d) les asymptotes d'équations $x = 2$ et $y = 1$
- 2.4** Soit h une fonction définie sur $[1; +\infty[$ telle que, pour tout réel $x \geq 1$, $h(x) \geq \sqrt{x} - 3$. On peut affirmer que :
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -3$ b) h est croissante sur $[1; +\infty[$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ d) h n'admet pas de limite en $+\infty$
- 2.5** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - e^x)$ est égale à :
- a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) $-\infty$