

Fiche de cours

Limites de fonctions

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 DÉFINITIONS

Définition — limite en $\pm\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On définit de même les limites en $-\infty$.

Définition — limite en un réel a . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a .

Notation. Si le comportement diffère de part et d'autre de a , on distingue la **limite à gauche** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ($x < a$) et la **limite à droite** $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ($x > a$).

2 LIMITES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE ET OPÉRATIONS

■ FORMULAIRE — à connaître par cœur (n entier, $n \geq 1$)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; pour $k > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$.
- **Formes indéterminées :** $(+\infty) + (-\infty)$; $0 \times (\pm\infty)$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\frac{0}{0}$.

Propriété. Les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient se combinent, *sauf* dans les quatre formes indéterminées. Si $\lim f = \ell \neq 0$ et $\lim g = 0$ avec $g > 0$, alors $\lim \frac{f}{g} = +\infty$ si $\ell > 0$, $-\infty$ si $\ell < 0$: le **signe du dénominateur** décide.

Propriété — composition. Si $u(x) \rightarrow b$ quand $x \rightarrow a$, et $g(X) \rightarrow c$ quand $X \rightarrow b$ (a, b, c réels ou $\pm\infty$), alors $g(u(x)) \rightarrow c$ quand $x \rightarrow a$. Ex. : $-x^2 \rightarrow -\infty$ et $e^X \rightarrow 0$ en $-\infty$, donc $e^{-x^2} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

Méthode — lever une indétermination. Pour un polynôme ou un quotient de polynômes en $\pm\infty$, factoriser par le **terme de plus haut degré** du numérateur et du dénominateur, puis simplifier. Avec une exponentielle, factoriser par e^x et utiliser les croissances comparées.

3 CROISSANCES COMPARÉES

Théorème. Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Remarque. En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x . *Idée de la démonstration (exigible) :* l'étude de $x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ donne $e^x > \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$, donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \rightarrow +\infty$; on généralise en posant $X = \frac{x}{n}$.

4 COMPARAISON ET GENDARMES

Théorème — comparaison. Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (énoncé analogue avec $-\infty$).

Théorème — théorème des gendarmes. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si g et h ont la même limite finie ℓ , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque. On s'en sert dès qu'apparaît un terme borné : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ fournissent l'encadrement de départ.

5 ASYMPTOTES PARALLÈLES AUX AXES

Définition. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Méthode — position relative. Étudier le signe de $f(x) - \ell$: si $f(x) - \ell > 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote horizontale ; si $f(x) - \ell < 0$, elle est en dessous.

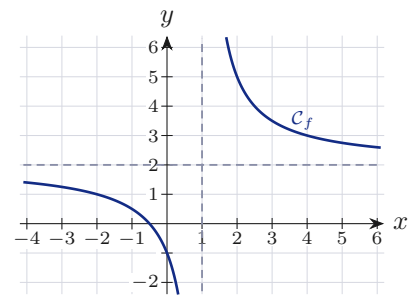


Figure 1 — $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$: asymptotes $y = 2$ et $x = 1$.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Lire sur une courbe une limite en $\pm\infty$ ou en un point, et en déduire les asymptotes.
- Reconnaître une forme indéterminée et la lever en factorisant le terme de plus haut degré ou e^x .
- Utiliser les croissances comparées entre x^n et e^x .
- Encadrer une expression contenant $\cos$ ou $\sin$ pour appliquer comparaison ou gendarmes.
- Déterminer les limites d'un quotient en un point interdit, en étudiant le signe du dénominateur, et en déduire une asymptote verticale.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — quotient de polynômes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}$ est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par x^2 : $\frac{x^2(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 2$: asymptote horizontale $y = 2$.

★ EXEMPLE — croissances comparées

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3)$ est de la forme $\infty - \infty$. On factorise par e^x : $e^x - x^3 = e^x \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$, donc le second facteur tend vers 1 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$.

★ EXEMPLE — limite en un point interdit

$f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Quand $x \rightarrow 2$, le numérateur tend vers $6 > 0$ et le dénominateur vers 0. Pour $x < 2$, $x-2 < 0$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; pour $x > 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. Asymptote verticale $x = 2$.

★ EXEMPLE — gendarmes

$g(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $x > 0$: $3 - \frac{1}{x} \leq g(x) \leq 3 + \frac{1}{x}$. Les deux membres tendent vers 3, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$: asymptote $y = 3$.

✗ PIÈGES

- $\frac{\ell}{0}$ ($\ell \neq 0$) n'est pas indéterminé, mais sans le *signe* du dénominateur on ne peut choisir entre $+\infty$ et $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$ dépend de la parité de n : $x^3 \rightarrow -\infty$ mais $x^4 \rightarrow +\infty$.
- Ne jamais « supprimer les termes » d'une forme indéterminée : il faut factoriser.
- Une asymptote horizontale peut être traversée : seul le signe de $f(x) - \ell$ donne la position de $\mathcal{C}_f$.