

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 3



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Limites de fonctions

Les bases : lire une limite, utiliser les limites usuelles, lever une indétermination

8 exercices · niveau ●○○○ à ●●○○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Lire sur une courbe une limite en $\pm\infty$ ou en un point ; en déduire les asymptotes parallèles aux axes et la position de la courbe par rapport à elles.
- Utiliser les limites usuelles, les opérations, les croissances comparées et les théorèmes de comparaison ; reconnaître une forme indéterminée et la lever en factorisant par le terme prépondérant.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

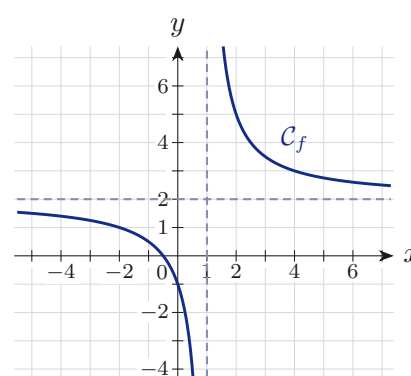
- **Limites usuelles** (n entier, $n \geq 1$, et k réel, $k > 0$) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$.
- **Formes indéterminées** : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$. **Croissances comparées** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.
- **Comparaison**. Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. **Gendarmes** : si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont la même limite finie ℓ , alors $\lim f = \ell$.
- **Asymptotes**. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est *asymptote horizontale* à $\mathcal{C}_f$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 1 Lire des limites sur une courbe

●○○○

La figure 1 représente la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

- 1.1 Déterminer graphiquement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, puis les équations des deux asymptotes à $\mathcal{C}_f$.
- 1.2 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$, puis l'inéquation $f(x) > 2$.
- 1.3 On admet que, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$. Retrouver par le calcul les quatre limites de la question 1.1.

Figure 1 — Courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes

Exercice 2 Les limites des fonctions de référence

●○○○

Déterminer, sans calculatrice, chacune des limites suivantes.

- | | | | |
|---|---|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ | b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ |

Exercice 3 Opérations sur les limites : aucune indétermination

Déterminer chacune des limites suivantes en précisant à chaque fois les limites des termes ou des facteurs utilisés.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + e^x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 + \frac{2}{x} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3}{x + 1}$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2 + 3}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} \right)$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) e^x$ h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$

Exercice 4 Reconnaître puis lever une indétermination

Indiquer s'il s'agit d'une forme indéterminée, puis déterminer la limite en factorisant par le terme de plus haut degré.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^2 + 2)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 + 3x^3 - 1)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 - 4}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 7}{x^2 + 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^2 + x}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - x}{3x + 2}$

Exercice 5 Limite en un point et asymptote verticale

- 5.1 Soit $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Étudier le signe de $x - 3$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, et en déduire les asymptotes à la courbe de f .
 5.2 Soit $g(x) = \frac{x - 1}{(x + 2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$, puis les limites de g en $\pm\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de g ?

Exercice 6 Croissances comparées

Déterminer chacune des limites suivantes. Pour les deux dernières, on commencera par factoriser par e^x .

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2) e^x$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x}$

Exercice 7 Comparaison et théorème des gendarmes

- 7.1 Soit $f(x) = x^2 + e^x - 3$ sur $[0; +\infty[$. Justifier que $f(x) \geq x^2 - 3$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 7.2 Soit $g(x) = 2 + \frac{\cos x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Justifier que, pour tout $x > 0$, $2 - \frac{1}{x} \leq g(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et l'interpréter graphiquement.
 7.3 Soit $h(x) = e^x \cos x$ sur $\mathbb{R}$. En encadrant $h(x)$, déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

Exercice 8 Asymptotes et position relative

- 8.1 Soit $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. Vérifier que $f(x) = 3 - \frac{7}{x + 2}$.
 8.2 Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, -2^- et -2^+ , et en déduire les asymptotes à $\mathcal{C}_f$.
 8.3 Étudier le signe de $f(x) - 3$; en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale, puis un réel M tel que $2,99 \leq f(x) \leq 3$ pour tout $x > M$.