

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 3



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 2 Limites de fonctions

Problèmes : modéliser, interpréter une asymptote, tracer une courbe

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Exploiter un tableau de variations et des limites pour tracer l'allure d'une courbe et ses asymptotes.
- Modéliser une situation concrète par une fonction, déterminer ses limites et *interpréter* l'asymptote obtenue (palier, seuil, coût minimal, amortissement) ; écrire un algorithme de seuil et justifier qu'il s'arrête.

Exercice 1 Du tableau de variations à la courbe

●●○

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dont le tableau de variations complet est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	0	+
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -4	-4 ↗ 2	2

- Donner les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en -1^- et en -1^+ , puis les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$ en précisant pour chacune la branche de courbe concernée.
- Dans un repère orthogonal, tracer les asymptotes en pointillés puis l'allure de $\mathcal{C}_f$ (on placera le point de coordonnées $(3; -4)$).
- L'affirmation « pour tout réel $x > 3$, $f(x) < 2$ » est-elle vraie ? Justifier à l'aide du tableau.

Exercice 2 Une perfusion à débit constant

●●○

Un patient reçoit un médicament en perfusion continue. La concentration du médicament dans le sang, exprimée en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, est modélisée t heures après le début de la perfusion par $C(t) = 8(1 - e^{-0,25t})$, pour $t \geq 0$.

- Calculer $C(0)$ et interpréter ; calculer $C(2)$ et $C(6)$, arrondis à 10^{-2} . Montrer ensuite que $C'(t) = 2e^{-0,25t}$ et en déduire le sens de variation de C .
- Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$, donner l'équation de l'asymptote correspondante et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- Ce médicament devient toxique au-delà de $9 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Le patient risque-t-il une intoxication, même après une perfusion très longue ?
- Le médicament n'est efficace qu'à partir de $6 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$: par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 heure du temps nécessaire pour atteindre ce seuil.

Exercice 3 Le coût moyen d'un atelier

●●○

Un atelier fabrique des cartes électroniques. Le coût total de fabrication de q cartes, en euros, est modélisé par $C(q) = 0,5q^2 + 30q + 800$ pour $q > 0$. Le coût moyen d'une carte est $M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

- 3.1** Montrer que, pour tout réel $q > 0$, $M(q) = 0,5q + 30 + \frac{800}{q}$, puis déterminer $\lim_{q \rightarrow 0^+} M(q)$ et $\lim_{q \rightarrow +\infty} M(q)$, et interpréter chacune de ces deux limites dans le contexte de l'exercice.
- 3.2** Montrer que $M'(q) = \frac{0,5q^2 - 800}{q^2}$ pour tout $q > 0$, puis dresser le tableau de variations de M sur $]0; +\infty[$ (limites comprises). En déduire le nombre de cartes à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal, et la valeur de ce coût moyen minimal.
- 3.3** L'atelier ne pouvant pas dépasser 100 cartes, quel est le coût moyen le plus élevé pour une production comprise entre 40 et 100 cartes ?

Exercice 4 Une suspension de voiture



Après le passage d'un dos-d'âne, la caisse d'une voiture oscille verticalement. On note $h(t)$ son écart à la position d'équilibre, en centimètres, t secondes après le choc : $h(t) = 6e^{-0,5t} \cos(2t)$, pour $t \geq 0$.

- 4.1** Calculer $h(0)$ et interpréter. Justifier ensuite que, pour tout réel $t \geq 0$, $-6e^{-0,5t} \leq h(t) \leq 6e^{-0,5t}$.
- 4.2** En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$ et interpréter graphiquement puis physiquement ce résultat.

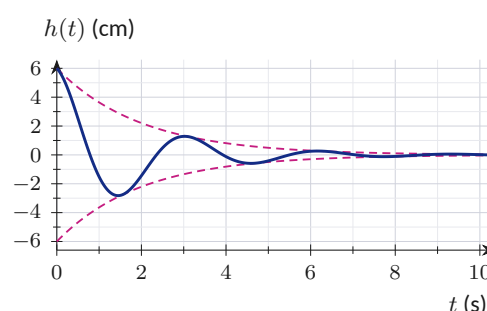


Figure 1 — Oscillations et courbes $y = \pm 6e^{-0,5t}$

- 4.3** On souhaite que l'écart reste inférieur à 0,1 cm en valeur absolue : justifier qu'il suffit que $6e^{-0,5t} \leq 0,1$, puis déterminer par balayage, à 0,1 seconde près, un instant à partir duquel c'est réalisé.

Exercice 5 Étude complète d'une fonction avec exponentielle



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- 5.1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Vérifier ensuite que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{2x}{e^x} + \frac{3}{e^x}$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ainsi que l'équation de l'asymptote correspondante.
- 5.2** Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (-2x - 1)e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$ (limites comprises). On donnera la valeur exacte du maximum, puis sa valeur arrondie à 10^{-2} .
- 5.3** Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote, puis tracer dans un repère orthonormé d'unité 1 cm l'asymptote et l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur $[-2; 5]$.

Exercice 6 Un algorithme de seuil



Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$.

- 6.1** Calculer $g(10)$ et $g(20)$, arrondis à l'unité, puis justifier à l'aide d'un théorème du cours que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- 6.2** La fonction `seuil` ci-contre doit renvoyer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $g(n) \geq A$. Recopier et compléter les lignes 4 et 5, expliquer pourquoi la boucle s'arrête toujours, puis donner la valeur renvoyée par `seuil(10*6)`.

```
1 from math import exp
2 def seuil(A):
3     n = 1
4     while ... :
5         n = ...
6     return n
```